www.sapientia.uji.es | 51



Cálculo integral

Beatriz Campos Sancho
Cristina Chiralt Monleon

Cálculo integral

Beatriz Campos Sancho
Cristina Chiralt Monleon



Departament de matemàtiques

■ Codi d'assignatura 305

Edita: Publicacions de la Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions
Campus del Riu Sec. Edifici Rectorat i Serveis Centrals. 12071 Castelló de la Plana
http://www.tenda.uji.es e-mail: publicacions@uji.es

Col·lecció Sapientia, 51
Primera edició, 2011
www.sapientia.uji.es

ISBN: 978-84-694-0641-0



Índice general

Prólogo

El material que a continuación presentamos abarca un curso completo de Cálculo Integral. Está basado en los contenidos de la asignatura Fundamentos Matemáticos II de la titulación de Ingeniería Industrial; por ello, va dirigido principalmente a alumnos de Ingeniería, tanto de las antiguas titulaciones como de los nuevos grados.

La intención de las autoras ha sido elaborar una material didáctico de fácil comprensión. Para ello, hemos incluido toda la teoría necesaria, prescindiendo de las demostraciones de los resultados, junto con una colección de ejemplos resueltos, explicados paso a paso y acompañados de gráficas y dibujos, tan necesarios para la visualización y comprensión de los problemas planteados.

Los contenidos están estructurados en tres temas: integración en una variable, integración múltiple e integración sobre curvas y superficies. Como complemento, se incluyen dos apéndices; en el primero de ellos se recuerda cómo dibujar gráficas en coordenadas polares y en el segundo se ofrece una recopilación de las ecuaciones y gráficas de las superficies de $\mathbb{R}^3$ más habituales.

En cada tema encontramos la teoría básica y resultados necesarios correspondientes, así como una serie de ejemplos resueltos, que esperamos sea de gran ayuda al alumno en su aprendizaje. A lo largo del texto, se han utilizado motivaciones basadas en ejemplos físicos de modo que los conceptos matemáticos introducidos resulten identificables y familiares. Al final de cada sección, se plantea una colección de ejercicios, acompañados de la solución, para ser resueltos por el alumno.

TEMA 1

INTEGRACIÓN EN $\mathbb{R}$

INTRODUCCIÓN

En este tema comenzamos estudiando el concepto de integral de Riemann en una variable de un modo constructivo. Entender bien la integral de Riemann como una suma infinita nos permitirá generalizarla y definir en los siguientes temas la integral para varias variables y las integrales de línea y de superficie. Los objetivos de este tema son:

- Entender el concepto de integral de Riemann.
- Deducir fórmulas para resolver determinados problemas aplicando este concepto, como cálculo de áreas, volúmenes de revolución, aplicaciones físicas.
- Extender la definición de integral para poder llevar a cabo el estudio de integrales impropias.

1.1. LA INTEGRAL DE RIEMANN

■ **Idea intuitiva del concepto de integral.** El concepto de integral surge al formalizar un concepto sencillo e intuitivo, el de *medida*, como por ejemplo longitud, área o volumen.

Consideremos el problema consistente en calcular el área de una región plana. Para resolverlo, vamos a utilizar una técnica similar a la que usaron los antiguos griegos basándose en que dicha área queda encajada entre dos polígonos de área conocida, uno inscrito y otro circunscrito. De este modo, el área del polígono inscrito nos da un valor aproximado del área por defecto y la del polígono circunscrito nos da un valor aproximado del área por exceso. El valor exacto del área buscada queda entre ambos.

Tomando polígonos inscritos y circunscritos cada vez más próximos a dicha región, las aproximaciones de las áreas se acercan cada vez más al área. Un proceso de límite nos permite llegar al valor exacto. Esta técnica se conoce como *principio de exhaución* de Arquímedes. Ocurre que no todas las figuras planas tienen área, ya que el principio de exhaución no permite determinar un número único, que esté comprendido entre las aproximaciones por exceso y por defecto y por ello se introduce el concepto de integral.

Para llegar al concepto de integral consideremos el problema consistente en calcular el área de la región encerrada por la gráfica de una función positiva y acotada $f(x)$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$ (Figura 1.1).

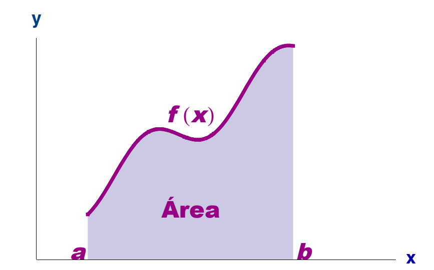


Figura 1.1: Área de una región plana.

Para ello, hacemos una partición de dicha región en rectángulos; podríamos tomar una colección de rectángulos que queden por debajo de dicha gráfica y otra colección de modo que queden por encima. Las sumas de sus áreas nos darían, respectivamente, aproximaciones por defecto y por exceso del área buscada (Figura 1.2). Posteriormente, haríamos un paso al límite tomando colecciones de rectángulos con base cada vez menor, es decir, tendiendo a cero.

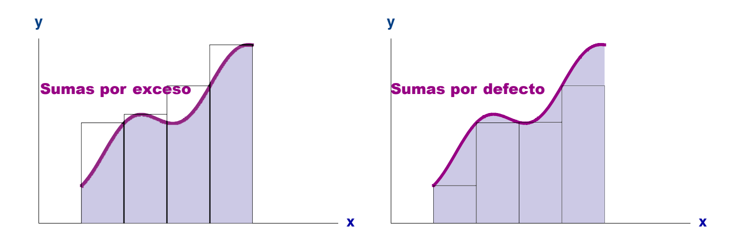


Figura 1.2: Aproximaciones al área por defecto y por exceso.

Un estudio similar se puede hacer si consideramos una única colección de rectángulos con igual longitud de base y cuyas alturas sean el valor de la función en un punto cualquiera de su base (Figura 1.3).

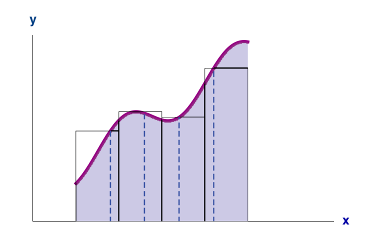


Figura 1.3: Aproximación con alturas intermedias.

La suma de las áreas de estos rectángulos es una aproximación al área; cuanto menor sea la base de dichos rectángulos, mejor será la aproximación (Figura 1.4). Por ello, esperamos que un paso al límite nos lleve al área buscada. Puesto que hemos elegido todas las bases de la misma longitud, hacer que dicha longitud tienda a cero equivale a hacer que el número de rectángulos tienda a infinito.

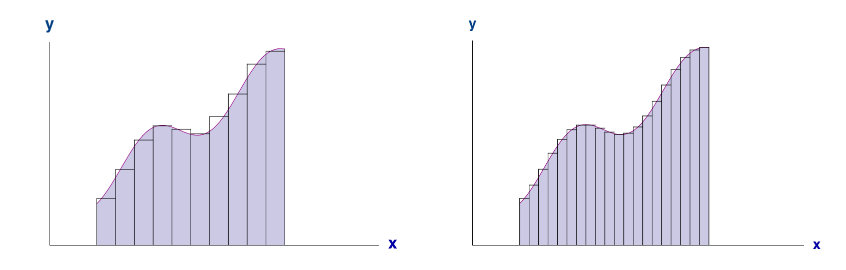


Figura 1.4: Aproximaciones al área.

Ejemplo 1.1. Supongamos que queremos hallar el área de la región comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 5$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. Para ello, dividimos el intervalo $[0, 2]$ en 5 subintervalos iguales:

$$\left[0, \frac{2}{5}\right], \left[\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right], \left[\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right], \left[\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right], \left[\frac{8}{5}, 2\right].$$

Consideramos un punto cualquiera en el interior de cada subintervalo

$$0{,}1 \in [0, 2/5]\,; \;\; 0{,}6 \in [2/5, 4/5]\,; 1 \in [4/5, 6/5]\,;$$

$$1{,}5 \in [6/5, 8/5]\,; 1{,}7 \in [8/5, 2]$$

y evaluamos la función en dichos puntos. Estos valores corresponden a las alturas de los rectángulos. Por tanto, una aproximación al área es:

$$\begin{aligned} A \approx\; & \frac{2}{5} f(0{,}1) + \frac{2}{5} f(0{,}6) + \frac{2}{5} f(1) + \frac{2}{5} f(1{,}5) + \frac{2}{5} f(1{,}7) \\ =\; & \frac{2}{5} 4{,}99 + \frac{2}{5} 4{,}64 + \frac{2}{5} 4 + \frac{2}{5} 2{,}75 + \frac{2}{5} 2{,}11 = \boxed{7.396} \end{aligned}$$

Haciendo que la longitud de las bases tienda a 0, y por lo tanto el número de rectángulos tienda a ∞, llegamos al valor exacto. ■

Este valor obtenido como una suma infinita de áreas de rectángulos nos lleva al concepto de integral de Riemann. Estas sumas en las que la función se evalúa en un punto intermedio de cada subintervalo reciben el nombre de sumas de Riemann.

La formalización matemática de lo que se ha expuesto nos permite separar la noción de integral de la idea intuitiva de área y obtener una definición analítica de integral. Esto tiene gran relevancia, no sólo porque nos permite un cierto rigor en su definición sino también porque sus aplicaciones se extienden más allá del cálculo de áreas.

1.1.1. Teoría básica

La construcción detallada vista en el ejemplo anterior nos da pie a introducir los conceptos básicos necesarios para construir la integral en el caso en

que la función considerada $f(x) > 0$. Más adelante veremos la generalización para el caso en que $f(x) < 0$ o cambie de signo en el intervalo que consideremos.

■ **Definición 1.1.** Dado un intervalo compacto (es decir, cerrado y acotado) $[a, b] \subset \mathbb{R}$, se llama **partición** de $[a, b]$ a cualquier conjunto finito de números reales

$$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_n\}$$

que verifique

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b.$$

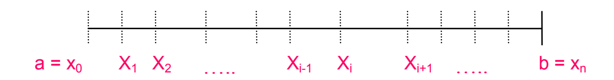


Figura 1.5: Partición de un intervalo.

- De esta forma $[a, b]$ queda dividido en n subintervalos que corresponderían a las bases de los rectángulos.
- $[x_{i-1}, x_i]$ es el intervalo i-ésimo de la partición.
- Llamamos amplitud del intervalo i-ésimo a $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
- Se denomina diámetro $|P|$ de la partición P a la mayor de las amplitudes Δx_i,

$$| P |= max \{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n \} .$$

- Si todas las amplitudes son iguales, se dice que P es una partición regular y en este caso el diámetro de la partición es $| P |= \frac{b-a}{n}$. Se verifica además que $| P |\to 0$ implica que $n \to \infty$.

⬢ **Ejemplo 1.2.** Dado el intervalo $[1, 2]$ tomamos una partición regular en 5 subintervalos definida por,

$$P = \{1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, 2\}.$$

Como la partición es regular todos los intervalos tienen la misma amplitud y su diámetro es $| P |= (2 - 1)/5 = 1/5$. ■

■ **Definición 1.2.** Dada una partición $P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_n = b\}$, se llama familia de puntos intermedios T a un conjunto de puntos

$$T = \{t_1, t_2, \cdots, t_i, \cdots, t_n\}$$

tales que $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

■ **Definición 1.3.** Dado un intervalo compacto $[a,b]$ y dada una función acotada $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, se llama suma de Riemann de f asociada a la partición P y a la familia T de puntos intermedios al número

$$\sigma(P,T,f)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\ \Delta x_i = f(t_1)\Delta x_1 + f(t_2)\Delta x_2 + \cdots + f(t_n)\Delta x_n,$$

donde $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

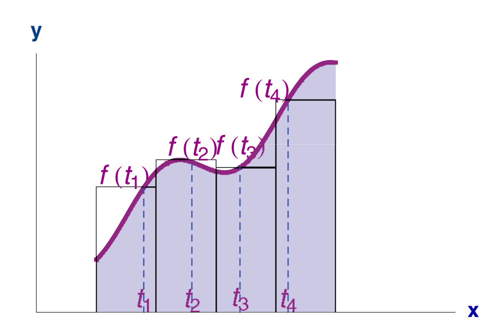


Figura 1.6: Sumas de Riemann.

Si tomamos $\mid P\mid$ muy pequeño cabe esperar que la suma de Riemann sea muy próxima (si f es no negativa) al área bajo la gráfica de f, con independencia de los puntos intermedios elegidos. El valor de la función en cada uno de los puntos intermedios, t_i, proporcionaría la altura de cada rectángulo, al que llamaremos rectángulo representativo (Figura 1.6).

■ **Definición 1.4.** Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función acotada definida en el intervalo compacto $[a,b]$, se dice que f es **integrable** en $[a,b]$ si existe el límite de las sumas de Riemann cuando $\mid P\mid\rightarrow 0$, independientemente de los puntos intermedios elegidos y ese valor límite es la integral definida

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0}\sigma(P,T,f).$$

En algunas ocasiones utilizaremos la notación $\int_a^b f$.

Ya que consideramos particiones regulares, podemos calcular el límite cuando $n\rightarrow\infty$. Por tanto, tomamos como definición de integral de f:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sigma(P,T,f) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i.$$

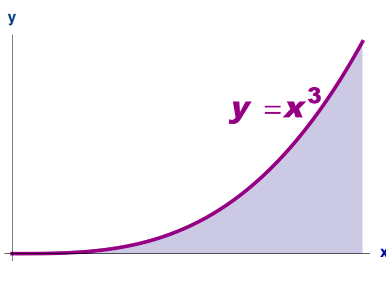
Notemos que la integral definida es una suma infinita de valores de una función calculada en puntos intermedios; por tanto, puede tomar valores positivos, negativos o nulos. Para interpretar la integral como el área bajo la gráfica de una función se deben satisfacer las condiciones del teorema siguiente.

■ **Teorema 1.1.** Si f es continua y no negativa en $[a,b]$, entonces el área comprendida entre la gráfica de f, el eje de abcisas y las rectas $x=a$ y $x=b$ es $\int_a^b f$.

⬣ **Ejemplo 1.3.** El área limitada por la gráfica de $f(x) = x^3$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 1$ viene dada por,

$$A = \int_0^1 x^3 dx,$$

puesto que f es continua y $f(x) = x^3 \geq 0$, $\forall x \in [0, 1]$.



Gráfica de $y = x^3$.

■

El cálculo de integrales aplicando la definición es generalmente difícil. Sin embargo, nos parece interesante conocer, al menos, cuándo una función es integrable sobre un intervalo compacto.

■ **Proposición 1.1.** Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada se verifica:

1. Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es monótona en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.
2. Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.
3. Si f es *continua a trozos* en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Recordemos que una función es continua a trozos si sólo tiene un número finito de puntos de discontinuidad y en ellos, los límites laterales existen y son finitos. En la Figura 1.7 tenemos un ejemplo.

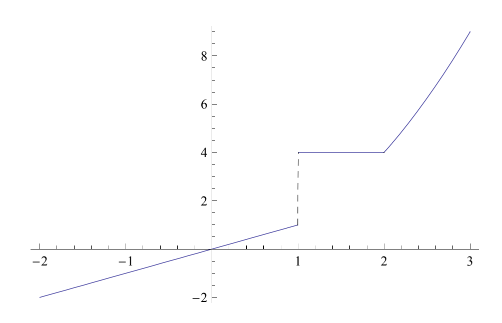


Figura 1.7: Función continua a trozos.

A partir de los resultados de la proposición anterior conocemos un extenso conjunto de funciones integrables; algunas de las siguientes propiedades nos permiten conocer la integrabilidad de otras funciones.

1.1.2. Propiedades de la integral de Riemann

(1) Linealidad. Si f y g son dos funciones reales, integrables en $[a,b]$, entonces también es integrable la función $hf+kg$ para cualesquiera $h,k\in\mathbb{R}$ y además

$$\int_a^b (hf+kg) = h\int_a^b f + k\int_a^b g.$$

(2) Integrabilidad del producto y del cociente. Sean f y g reales e integrables en $[a,b]$. Entonces:

(a) $f\cdot g$ es integrable en $[a,b]$.

(b) $\dfrac{f}{g}$ es integrable en $[a,b]$ si $g(x)\neq 0$, $\forall x\in[a,b]$.

(3) Monotonía. Si f y g son integrables en $[a,b]$ y si se cumple $f(x)\leqslant g(x)$ cuando $a\leqslant x\leqslant b$ entonces $\int_a^b f\leqslant\int_a^b g$. En particular, si $f(x)\geq 0$, entonces $\int_a^b f\geq 0$.

(4) Integrabilidad del valor absoluto. Si f es integrable en $[a,b]$, entones $|f|$ es integrable en $[a,b]$ y se verifica:

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|\,.$$

■ **Nota 1.1.** Entendemos por $|f|$ la función *valor absoluto* definida como

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x)\geq 0 \\ -f(x) & \text{si} \quad f(x)<0. \end{cases}$$

(5) Aditividad respecto del intervalo de integración. Sea f acotada en $[a,b]$ y $c\in\,]\,a,b\,[$. Entonces f es integrable en $[a,b]$ si y sólo si lo es en $[a,c]$ y en $[c,b]$. En este caso se cumple:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

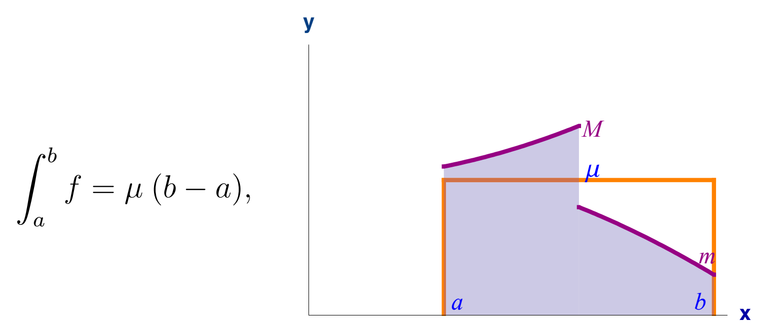
Esta propiedad constituye la base para algunas convenciones de notación; así, si cambiamos los límites de integración cambia el signo de la integral, es decir, $\int_b^a f = -\int_a^b f$. Cuando los límites de integración son iguales la integral vale 0, esto es, $\int_a^a f = 0$.

(6) Composición de funciones. Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ y $\varphi:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$, tales que f es integrable en $[a,b]$ y φ es de clase C^1 en $[\alpha,\beta]$. Si además $\varphi([\alpha,\beta])\subset[a,b]$, entonces la función compuesta $f\circ\varphi:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$ es integrable en $[\alpha,\beta]$.

■ **Nota 1.2.** Una función se dice que es de clase C^1 en el intervalo $[a,b]$ si es continua y además existe su derivada primera y también es continua en $[a,b]$.

(7) Teorema de la media. Sea f una función integrable en $[a, b]$ donde $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para $x \in [a, b]$ y para unos ciertos $m, M \in \mathbb{R}$. Entonces (como consecuencia del Teorema de Weierstrass) existe $\mu \in [m, M]$ tal que:

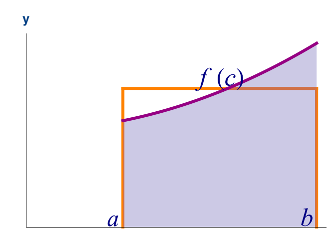
$$\int_a^b f = \mu\,(b-a),$$



μ recibe el nombre de valor medio integral de f en $[a, b]$.

Si además f es continua en el intervalo, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $\mu = f(c)$ y por tanto

$$\int_a^b f = f(c)\,(b-a),$$



Nota 1.3. El teorema de la media no se ha de entender como un medio de cálculo de la integral sino que nos permitirá, mediante la integral, hallar *valores promedio* de funciones. Esto es,

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ejemplo 1.4. Suponiendo que la temperatura diaria en grados centígrados en nuestra ciudad, t meses después del 15 de junio es aproximada por

$$T = f(t) = 22 + 10\cos\frac{\pi t}{6},$$

determinemos la temperatura promedio T_p entre el 15 de agosto y el 15 de octubre.

Solución. Considerando $t = 0$ el 15 de junio, el promedio entre el 15 de agosto y el 15 de octubre viene dado por:

$$T_p = \frac{1}{3}\int_2^5 \left(22 + 10\cos\frac{\pi t}{6}\right)\,dt = \frac{1}{3}\left[22t + \frac{60}{\pi}\sin\frac{\pi t}{6}\right]_2^5 = 19{,}6698^oC. \blacksquare$$

1.1.3. El teorema fundamental del cálculo

El teorema fundamental del cálculo nos proporciona métodos de cálculo de integrales y además establece la conexión entre derivación e integración. Dos conceptos que aparecen son el de *primitiva* y el de *integral indefinida* que definimos a continuación.

■ **Definición 1.5.** Dada una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, se llama función primitiva o antiderivada de f a otra función $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en $[a, b]$ cuya derivada sea f en dicho intervalo, es decir,

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b] \, .$$

Las primitivas de una función cumplen:

(1) Si F es una primitiva de f en $[a, b]$, entonces admite como primitivas a las funciones $G(x) = F(x) + C$, siendo C un valor real cualquiera.

(2) Si una función tiene una primitiva entonces admite infinitas primitivas.

(3) Si F y G son primitivas de una misma función f en $[a, b]$, entonces existe una constante C tal que $F(x) - G(x) = C$, $\forall x \in [a, b]$.

(4) Al conjunto de todas las primitivas de f se le llama integral indefinida de f y se denota $\int f(x)dx$. Por tanto:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

⬢ **Ejemplo 1.5.** Dada la función $f(x) = 2x$,

- $F(x) = x^2$ es una primitiva de $f(x)$ ya que $F'(x) = 2x = f(x)$.
- $G(x) = x^2 + 5$ es otra primitiva de $f(x)$ ya que $G'(x) = 2x = f(x)$.

Toda función de la forma $x^2 + C$ es primitiva de $f(x)$, por tanto:

$$\int f(x)dx = x^2 + C. \blacksquare$$

■ **Definición 1.6.** Sea f una función real integrable en el intervalo $[a, b]$, la función $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

recibe el nombre de **función integral indefinida** o función integral de f correspondiente al punto a.

La función integral indefinida aparece al dejar variable el extremo superior de la integral, x, manteniendo fijo el extremo inferior a. La Figura 1.8 nos da un punto de vista geométrico: representa el área bajo F desde el punto a hasta el punto x.

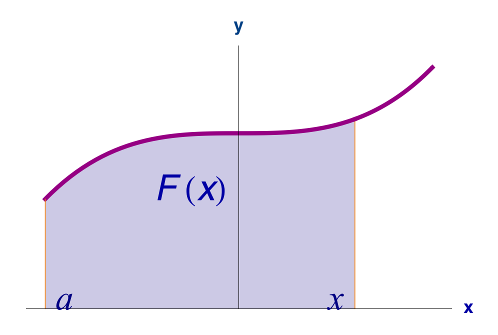


Figura 1.8: Integral indefinida.

Esta función F tiene algunas propiedades importantes que dependen de la función que se integra:

■ **Teorema 1.2.** Si f es integrable sobre un intervalo compacto, entonces F es continua sobre dicho intervalo.

■ **Teorema 1.3** (Primer teorema fundamental del cálculo)**.** Si f es continua en $[a, b]$, entonces F es derivable en $[a, b]$ y su derivada es $F'(x) = f(x)$ para cualquier $x \in [a, b]$.

Notemos que $F'(x) = \dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$, independientemente del valor que tome a. Además cuando f es continua (condición que exige el teorema fundamental del cálculo) los conceptos de primitiva e integral indefinida coinciden, aunque se hayan definido de forma distinta.

Luego, si f es continua, admite primitivas pero si deja de ser continua en algún punto del intervalo, aunque siga siendo integrable (y por tanto admite integral indefinida) puede no admitir primitiva.

Ejemplo 1.6. Sea la función signo de x :

$$f(x) = sg(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Comprobemos que f admite integral indefinida en $\mathbb{R}$ pero no primitiva.

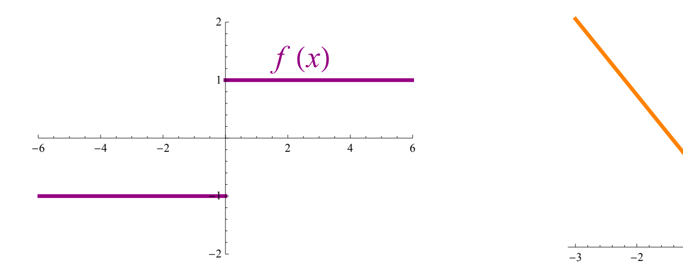
Solución. La función signo de x admite integral indefinida dada por:

$$F(x) = \int_0^x sg(t)dt$$

para integrar esta función integraremos cada trozo de la función $sg(x)$ definida en (1.1), esto es:

$$\begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

que corresponde a la función valor absoluto $|x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.



Gráficas de $f(x) = sg(x)$ y de $F(x) = |x|$.

Pero $F(x) = |x|$ no es primitiva de $f(x)$ en $\mathbb{R}$, ya que no es derivable en $x = 0$.■

Una consecuencia inmediata del primer teorema fundamental del cálculo es que nos proporciona un método práctico para calcular integrales, es decir, para hallar primitivas. Veamos un corolario para el que se supone conocida la existencia de primitivas.

■ **Corolario 1.1** (Regla de Barrow)**.** Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en el intervalo de definición y si $G : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una primitiva de f en dicho intervalo, entonces se verifica que:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \text{ que denotaremos por } [G(x)]_{x=a}^{x=b}.$$

Esta dificultad esencial referente a la existencia de funciones primitivas no impide establecer que, bajo determinadas condiciones, la regla de Barrow se siga cumpliendo aunque f no sea continua.

■ **Teorema 1.4** (Segundo teorema fundamental del cálculo)**.** Sea la función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en el intervalo compacto $[a, b]$ y sea $G : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una primitiva de f en $[a, b]$, entonces se verifica:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

● **Ejemplo 1.7.** Resolvamos las siguientes integrales:

1. $\int_0^\pi \sin x\, dx = [-\cos x]_{x=0}^{x=\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$

2. $\int_0^1 x^n\, dx$ siendo $n \neq -1$.

   $\int_0^1 x^n\, dx = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \dfrac{1}{n+1} - 0 = \dfrac{1}{n+1}.$

3. $\int_1^2 \dfrac{dx}{x} = [\ln x]_{x=1}^{x=2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$

4. $\int_0^1 x\, e^{x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}(e^1 - e^0) = \frac{1}{2}(e - 1).$

5. $\int_0^\pi x\, \sin x\, dx.$

   La primitiva de $f(x) = x\sin x$ es, aplicando integración por partes, $F(x) = -x\cos x + \sin x$, por tanto

$$\int_0^\pi x\, \sin x\, dx = [-x\, \cos x + \sin x]_{x=0}^{x=\pi} = \pi.$$

6. $\int_1^9 \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} dx.$

La primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ es, aplicando el cambio $x = t^2$ y volviendo a deshacerlo, $F(x) = \dfrac{-2}{1+\sqrt{x}}$, por tanto:

$$\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}dx = \left[\frac{-2}{1+\sqrt{x}}\right]_1^9 = \frac{1}{2}. \blacksquare$$

La integración por partes y por cambio de variable se puede aplicar directamente para las integrales definidas utilizando las proposiciones siguientes:

■ **Proposición 1.2** (Integración por partes)**.** Sean u y v funciones reales de clase $\mathcal{C}^1$ en el intervalo compacto $[a, b]$, entonces se verifica:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Ejemplo 1.8. Calculemos $\int_0^\pi x \sin x\, dx$.

Solución. Tomamos $u(x) = x$ y $v'(x) = \sin x$, por tanto $u'(x) = 1$ y $v(x) = -\cos x$. Aplicando la fórmula de integración por partes tenemos:

$$\int_0^\pi x \sin x\, dx = [-x \cos x]_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^\pi \cos x\, dx = \pi + [\sin x]_{x=0}^{x=\pi} = \pi. \blacksquare$$

■ **Proposición 1.3** (Integración por cambio de variable)**.** Sea f una función integrable en $[a, b]$ y sea φ una función de clase $\mathcal{C}^1$ en $[\alpha, \beta]$ con $\alpha = \varphi^{-1}(a)$, $\beta = \varphi^{-1}(b)$ y $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b]$. Entonces se verifica:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

■ **Nota 1.4.** Al hacer un cambio de variable $x = \varphi(t)$ implica que $t = \varphi^{-1}(x)$. De ello se deriva que tenemos que cambiar también los límites de integración para la nueva variable t.

Ejemplo 1.9. Calculemos $\int_1^9 \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}dx$.

Solución. Consideremos el cambio $x = \varphi(t) = t^2$, luego $t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Entonces a $x = 1$ le corresponde un valor $t = \sqrt{1} = 1$ y a $x = 9$ le corresponde $t = \sqrt{9} = 3$, luego:

$$\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}dx = \int_1^3 \frac{1}{t(1+t)^2}2\,t\,dt = \int_1^3 \frac{1}{(1+t)^2}2dt$$

$$= 2\left[\frac{-1}{1+t}\right]_{t=1}^{t=3} = \frac{1}{2}. \blacksquare$$

1.1.4. Ejercicios de la sección 1.1

1. ¿Cómo explicarías que una función continua a trozos en un intervalo $[a, b]$ sea integrable en dicho intervalo?

2. ¿Cómo calcularías el área encerrada entre una función f, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$ si f toma valores negativos en el intervalo $[a, b]$?

3. Calcula las siguientes integrales definidas:

   (a) $\int_0^1 \mathrm{e}^x(x^2 + 2x)\,dx$. (Solución: e)

   (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\cos^3 x\,dx$. (Solución: $\frac{16}{3}$).

   (c) $\int_1^3 \dfrac{x+2}{x^2+2x+1}\,dx$. (Solución: $\frac{1}{4} + \ln 2$).

   (d) $\int_0^1 x\sqrt{3-x^2}\,dx$. (Solución: $\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$).

   (e) $\int_1^e x^2 \ln x\,dx$. (Solución: $\frac{1}{9}(1 + 2e^3)$).

   (f) $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}\,dx$. (Solución: $\frac{2+\pi}{2}$).

1.2. APLICACIONES DE LA INTEGRAL

Al principio del tema se introdujo la integral con el fin de obtener el área de una figura plana. Como veremos a continuación no sólo se puede usar la integral en el cálculo de áreas de figuras planas, sino que también nos permite calcular volúmenes de sólidos de revolución al menos en determinados casos de particular interés.

Además de las aplicaciones geométricas también resulta interesante mostrar algunas aplicaciones físicas utilizadas en el ámbito de la ingeniería.

1.2.1. Cálculo de áreas de figuras planas

Veamos cómo poner en práctica el cálculo de áreas de figuras planas siguiendo ciertas normas dadas en la introducción del tema.

1. Área entre una curva y el eje de abcisas.

Dada una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$, el conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ limitado por la curva $y = f(x)$, el eje de abcisas y las rectas $x = a$ y $x = b$ tiene área y ésta vale:

$$A(C) = \begin{cases} \int_a^b f(x)dx & \text{si } f(x) \geq 0, \ \ \forall x \in [a, b] \\ \\ \int_a^b |f(x)|\,dx & \text{si } f(x) < 0 \text{ o si el signo de } f(x) \text{ cambia un número} \\ & \text{finito de veces en } [a, b]\,. \end{cases}$$

El método para integrar la función $|f(x)|$ se reduce a:

(1) Integrar la función $-f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ si $f(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(2) Si el signo de $f(x)$ cambia un número finito de veces, resolvemos la ecuación $f(x) = 0$ y detectamos aquellos intervalos donde $f(x)$ es negativa y aquéllos donde $f(x)$ es positiva. Integramos sobre cada uno de los intervalos cambiando el signo allí donde la integral es negativa y finalmente sumamos los valores (positivos) obtenidos al integrar en cada intervalo.

■ **Nota 1.5.** Una alternativa a estos casos que es usada en la práctica consiste en calcular

$$\left| \int_a^b f \right|$$

en el caso (1). En el caso (2) calculamos

$$\left| \int_a^{x_1} f \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| + \cdots + \left| \int_{x_n}^{b} f \right|$$

siendo $x_1, x_2, \cdots, x_n$ las raíces de f en el intervalo $[a, b]$.

⬢ **Ejemplo 1.10.** Calculemos el área de la región encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = -x^2 - x + 2$, las rectas $x = -3$, $x = 3$ y el eje de abcisas.

Solución. Dado que $f(x) \geq 0$ para $-2 \leq x \leq 1$ y $f(x) \leq 0$ para $-3 \leq x \leq -2$ y $1 \leq x \leq 3$ (ver Figura 1.9), el área vendrá dada por:

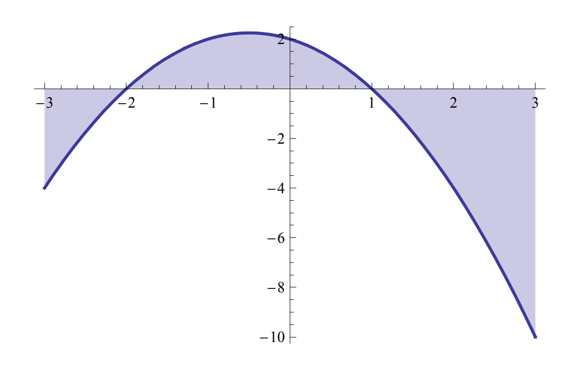


Figura 1.9: Área entre la gráfica de $f(x)$ y el eje X.

$$A = -\int_{-3}^{-2} (-x^2 - x + 2)dx + \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)dx - \int_{1}^{3} (-x^2 - x + 2)dx$$

$$= \frac{11}{6} + \frac{9}{2} + \frac{26}{3} = 15 \text{ u.a.} \ \blacksquare$$

⬢ **Ejercicio 1.1.** Calcula el área de la región comprendida entre la curva $y = x^3 + x^2 - 2x$, las rectas $x = -3$, $x = 3$ y el eje de abcisas. (Solución: $\frac{37}{12}$ u.a.)

2. Área encerrada entre dos curvas.

Consideremos f y g dos funciones continuas en el intervalo compacto $[a, b]$. El conjunto C limitado por la curva $y = f(x)$, la curva $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$, tiene área dada por la integral,

$$A(C) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

El método para integrar $|f(x) - g(x)|$ se reduce a:

(1) Integrar la función $f(x) - g(x)$ si $f(x) - g(x) > 0$ en todo el intervalo $[a, b]$.

(2) Integrar la función $g(x) - f(x)$ si $f(x) - g(x) < 0$ en todo el intervalo $[a, b]$.

(3) Si el signo de $f(x) - g(x)$ cambia en el intervalo $[a, b]$ un número finito de veces, resolvemos la ecuación $f(x) - g(x) = 0$. Integramos $f - g$ en los intervalos donde $f - g > 0$, es decir, la gráfica de f está por encima de la gráfica de g, e integramos $g - f$ en los intervalos en los que $f - g < 0$, es decir, la gráfica de f está por debajo de la gráfica de g, independientemente de la situación de ambas gráficas respecto del eje de abcisas. Finalmente sumamos los valores positivos obtenidos en cada integral.

■ **Nota 1.6.** Igual que antes planteamos una alternativa a estos casos que es usada en la práctica consiste en calcular

$$\left| \int_a^b (f - g) \right|$$

en los casos (1) y (2). En el caso (3) calculamos

$$\left| \int_a^{x_1} (f - g) \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (f - g) \right| + \cdots + \left| \int_{x_n}^{b} (f - g) \right|$$

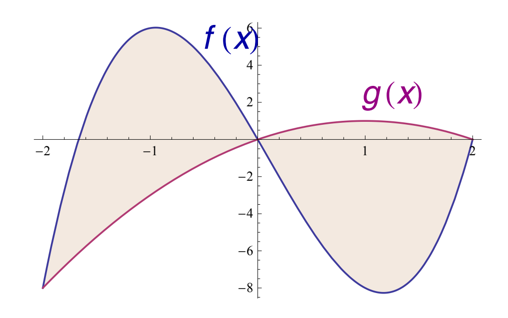
siendo $x_1, x_2, \cdots, x_n$ los puntos de corte de f y g en el intervalo $[a, b]$.

■ **Nota 1.7.** En algunos de estos casos la resolución de la integral se simplifica si consideramos las funciones $x = h(y)$, $x = k(y)$ recíprocas de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ respectivamente, e integramos respecto de y. A continuación vemos un ejemplo que ilustra este caso.

⬢ **Ejemplo 1.11.** Hallemos el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$.

Solución. En primer lugar obtenemos los puntos de corte de ambas curvas:

$$3x^3 - x^2 - 10x = (-x^2 + 2x), \quad \text{es decir,}$$
$$3x^3 - 12x = 0, \quad \text{por tanto,} \quad x = 0, \; x = 2, \; x = -2.$$



Área comprendida entre $f(x)$ y $g(x)$.

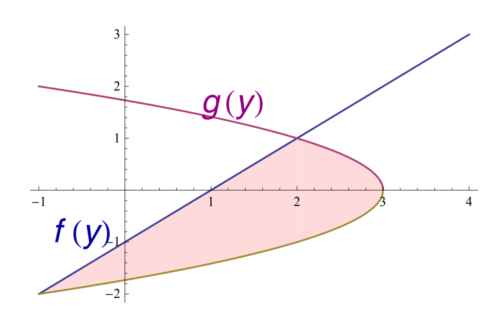
En el intervalo $[-2, 0]$ se tiene que $f > g$ y en el intervalo $[0, 2]$ se tiene que $f < g$; por tanto,

$$A = \int_{-2}^{2} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{-2}^{0} (f(x) - g(x))dx + \int_{0}^{2} (g(x) - f(x))dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (3x^3 - 12x)dx + \int_{0}^{2} (-3x^3 + 12x)dx = 12 + 12 = 24 \text{ u.a.} \blacksquare$$

Ejemplo 1.12. Calculemos el área de la región limitada por la gráfica de $y = x - 1$ y la de $x = 3 - y^2$.

Solución. En este caso, consideramos los rectángulos representativos horizontales, es decir, consideramos las funciones $x = f(y) = y + 1$ y $x = g(y) = 3 - y^2$ que se cortan para $y = 1$ e $y = -2$, es decir, en los puntos $(2, 1)$ y $(-1, -2.)$.



Área comprendida entre la recta y la parábola.

Entonces, el área vendrá dada por:

$$A = \int_{-2}^{1} \left((3 - y^2) - (y + 1)\right) dy = \int_{-2}^{1} (-y^2 - y + 2)dy = \frac{9}{2} \text{ u.a.} \blacksquare$$

Ejercicio 1.2. Halla el área comprendida entre las curvas $y = \sin x$ y $y = \cos x$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. (Solución: $2(\sqrt{2} - 1)$ u.a.).

Ejercicio 1.3. (a) Calcula el área encerrada por la elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. (Solución: 6π u.a.).

(b) Calcula el área encerrada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
(Solución: $\pi\, a\, b$ u.a.).

1.2.2. Cálculo de volúmenes

Para el cálculo de volúmenes se suelen utilizar las integrales dobles y triples. Sin embargo, existen determinados sólidos, los cuerpos de revolución, cuyo volumen se puede calcular de un modo sencillo utilizando integrales simples.

Los sólidos de revolución aparecen frecuentemente en ingeniería y en procesos de producción (ejes, embudos, pilares, botellas, émbolos y otros). Estos cuerpos se obtienen al girar una región del plano alrededor de un eje llamado *eje de revolución*. Estudiamos dos métodos para calcular este tipo de volúmenes, la integración por discos y la integración por capas, utilizando cada uno de ellos según sea más conveniente para el desarrollo del problema.

1. Método de los discos.

Consideremos una región plana sencilla: un rectángulo apoyado sobre el eje de giro. Al girar alrededor del eje de revolución da lugar a un cilindro circular recto o disco, tal y como aparece en la Figura 1.10.

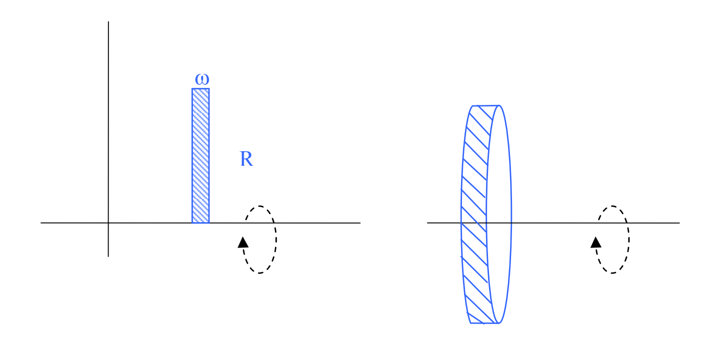


Figura 1.10: Disco generado por la revolución de un rectángulo.

Si R es el radio y w la anchura del disco, entonces el volumen del disco viene dado por:

$$V = \pi R^2 w.$$

La expresión anterior nos será útil para hallar el volumen de un sólido de revolución más general. Consideremos la región plana limitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje de revolución y las rectas $x = a$ y $x = b$ y supongamos que queremos calcular el volumen del sólido de revolución engendrado al girar dicha región alrededor del eje de revolución (Figura 1.11).

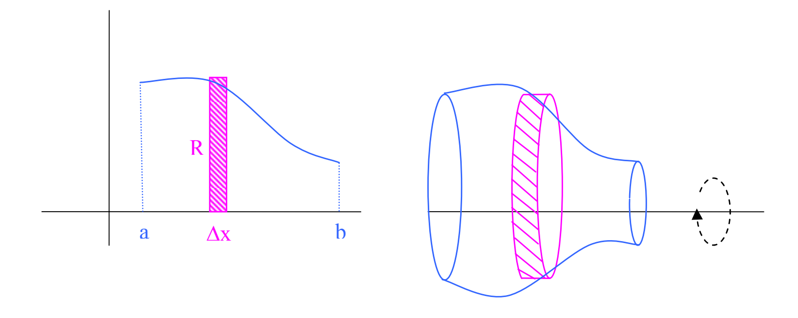


Figura 1.11: Sólido generado por la revolución del área bajo una curva.

Podemos llegar a la integral mediante sumas de Riemann. Para ello:

- Tomamos una partición del intervalo $[a, b]$ que lo divida en n subintervalos iguales $[x_{i-1}, x_i]$.
- Para cada uno de estos subintervalos, consideramos un rectángulo de base: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y altura $R(c_i)$ con $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
- Al girar alrededor del eje de revolución da lugar a un disco cuyo volumen es:
$$V_i = \pi(R(c_i))^2 \Delta x_i.$$
- Sumando los volúmenes de estos discos obtenemos un valor aproximado del volumen del sólido de revolución (Figura 1.12),
$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi(R(c_i))^2 \Delta x_i, \quad \text{(sumas de Riemann)}.$$

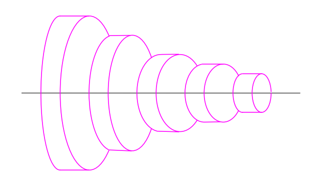
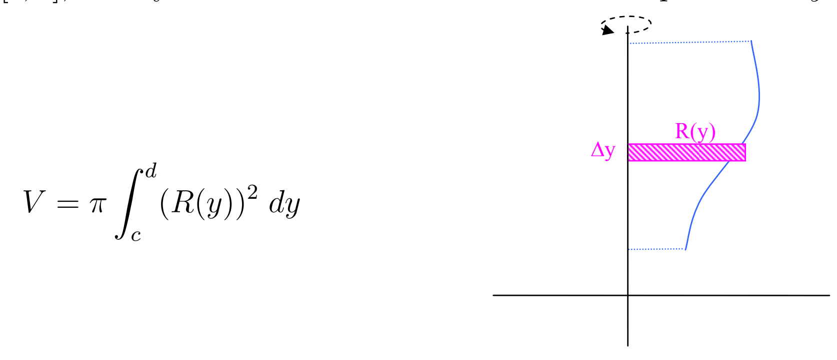


Figura 1.12: Aproximación del volumen mediante discos.

- Tomando límite cuando $n \to \infty$, tendremos el valor exacto, si existe, obteniéndose la siguiente integral:
$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi(R(c_i))^2 \Delta x_i = \pi \int_a^b (R(x))^2 dx.$$

Si el eje de revolución es el eje X, entonces $R(x)$ viene dado por $f(x)$ y se tiene:
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Una expresión similar se obtiene cuando giramos alrededor de un eje vertical en el intervalo $[c, d]$, en cuyo caso las funciones consideradas dependen de y:



$$V = \pi \int_c^d (R(y))^2 \, dy$$

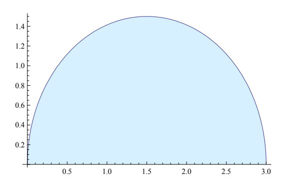
Cuando la región que gira no apoya sobre el eje de revolución se genera un sólido con agujero. En este caso, dicha región está comprendida entre dos curvas continuas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ donde $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Entonces, al volumen del sólido generado por la región limitada por la curva más lejana al eje de revolución le restaremos el volumen del agujero, generado por la curva más cercana:

$$V = V_g - V_f = \pi \int_a^b \left[(R(x))^2 - (r(x))^2 \right] dx$$

En el caso en que el eje de revolución sea el eje X, se tendrá:

$$V = \pi \int_a^b \left[(g(x))^2 - (f(x))^2 \right] dx$$

Ejemplo 1.13. Calculemos el volumen del sólido de revolución generado al girar la región plana limitada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$ y el eje X, para $0 \leqslant x \leqslant 3$, alrededor del eje X.



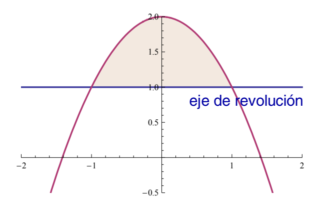
Región plana bajo la gráfica de $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$.

es una bola de dimensión 3 y su volumen viene dado por:

$$V = \pi \int_0^3 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^3 (\sqrt{3x - x^2})^2 dx$$

$$= \pi \int_0^3 (3x - x^2) dx = \pi \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{9\pi}{2} \text{ u.v.} \blacksquare$$

Ejemplo 1.14. Calculemos el volumen del sólido de revolución generado al girar la región plana comprendida entre las gráficas de $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = 1$ en torno a la recta $y = 1$.



Región plana entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

Solución. En este caso, como el eje de revolución es la recta $y = 1$, el radio de cada rectángulo representativo vendrá dado por $R(x) = f(x) - 1$.

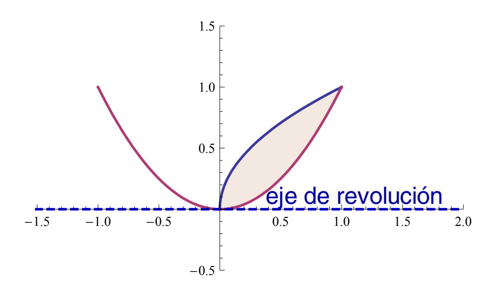
Además, dichas gráficas cortan en los puntos de abcisa $x = -1$ y $x = 1$. Luego,

$$V = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \frac{16\pi}{15} \text{ u.v.} \blacksquare$$

Ejemplo 1.15. La región R acotada por las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ gira alrededor del eje X. Calculemos el volumen del cuerpo resultante.

Solución. Se trata de un sólido de revolución con agujero.



Región acotada por las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$.

Ambas curvas se cortan en los puntos de abcisas $x = 0$ y $x = 1$, por tanto:

$$V = \pi \int_0^1 \left[(R(x))^2 - (r(x))^2 \right] dx = \pi \int_0^1 (x - x^4) \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3\pi}{10} \text{ u.v.} \blacksquare$$

Ejercicio 1.4. Un mecánico perfora un agujero a través del centro de una esfera de metal de 5 cm de radio. El agujero tiene 3 cm de radio, ¿cuál es el volumen del anillo resultante? (Solución: $\frac{256\pi}{3}$ cm^3).

2. Método de las capas o tubos.

Un método alternativo para calcular volúmenes de sólidos de revolución es el que emplea capas cilíndricas. Para introducir este método consideramos el rectángulo representativo como el de la Figura 1.13, es decir paralelo al eje de revolución, siendo w la anchura del rectángulo, h su altura y p la distancia del centro del rectángulo al eje de revolución, que llamaremos radio medio.

Cuando el rectángulo gira alrededor del eje de revolución engendra una capa cilíndrica de anchura w cuyo volumen será el volumen del cilindro exterior menos el volumen del cilindro interior, esto es,

$$V(\text{capa cilíndrica}) = \pi\left(p + \frac{w}{2}\right)^2 h - \pi\left(p - \frac{w}{2}\right)^2 h = 2\pi\, p\, h\, w.$$

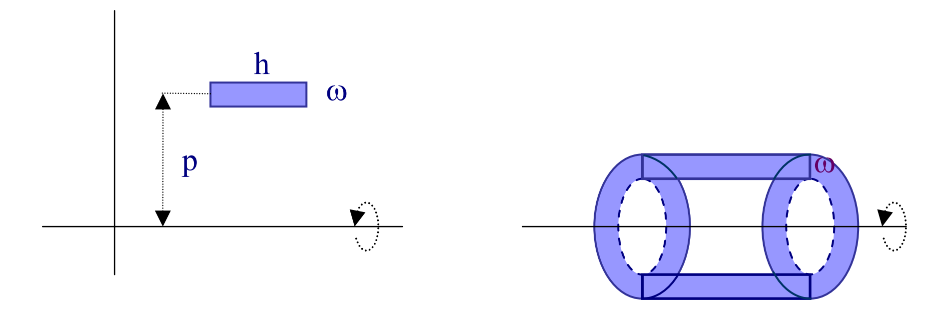


Figura 1.13: Capa cilíndrica o tubo generado por la revolución de un rectángulo.

Esta fórmula nos permite calcular el volumen del sólido de revolución del siguiente modo: supongamos una región plana acotada superior e inferiormente por las rectas $y = c$ e $y = d$, que gira alrededor de un eje horizontal engendrando un sólido (Figura 1.14). Procedemos de modo análogo al caso de los discos construyendo la integral mediante sumas de Riemann.

- Tomamos una partición del intervalo $[c, d]$ en n subintervalos iguales $[y_{i-1}, y_i]$.

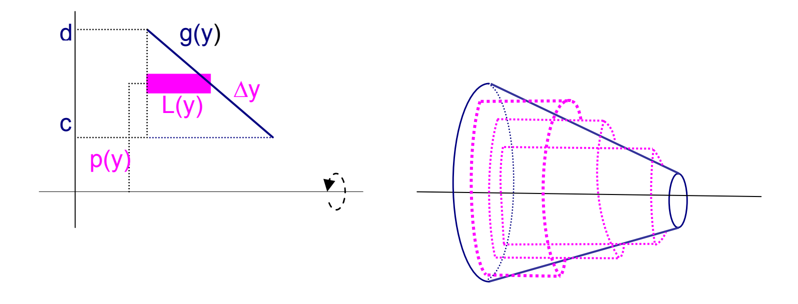


Figura 1.14: Aproximación de un volumen mediante capas cilíndricas.

- Aproximamos la región mediante rectángulos de modo que cada rectángulo, de anchura $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, sea paralelo al eje de revolución. Al girar la región, cada rectángulo genera una capa de volumen:

$$V_i = 2\pi p(c_i)h(c_i)\Delta y_i$$

con $c_i \in [y_{i-1}, y_i]$.

- Podemos aproximar el volumen total mediante la suma de las capas (ver Figura 1.14):

$$V \simeq \sum_{i=1}^{n} 2\pi p(c_i)h(c_i)\Delta y_i.$$

- Tomando límite cuando $n \to +\infty$, tenemos

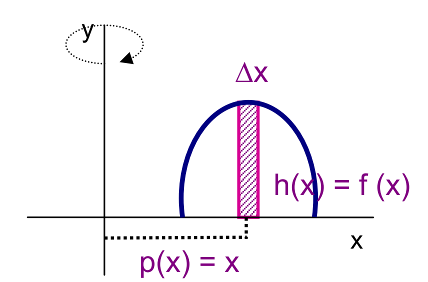
$$V = \lim_{n\to+\infty} 2\pi \sum_{i=1}^{n} p(c_i)h(c_i)\Delta y_i = 2\pi \int_c^d p(y)h(y)dy.$$

Si el eje de revolución es vertical la fórmula será,

$$V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)dx.$$

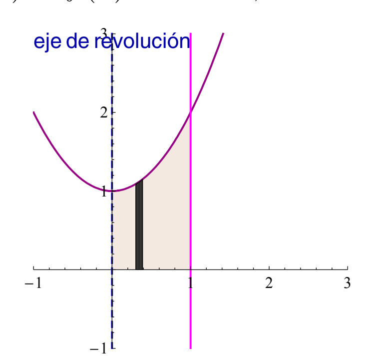
Si el eje de revolución es el eje Y, entonces $p(x) = x$ y si además la región se encuentra sobre el eje x entonces $h(x) = f(x)$, por tanto:

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx.$$



Ejemplo 1.16. Calculemos el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$, alrededor del eje Y.

Solución. Considerando el método de las capas, tenemos que para cada rectángulo representativo la distancia de éste al eje Y viene dada por $p(x) = x$ y su altura viene dada por $h(x) = f(x) = x^2 + 1$,



por tanto:

$$V = 2\pi \int_0^1 x(x^2+1)dx = 2\pi \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

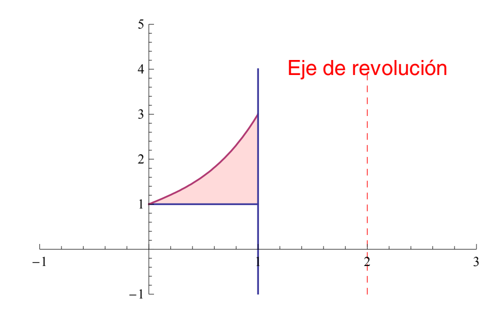
$$= 2\pi\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} \text{ u.v. } \blacksquare$$

Notemos que este volumen también se puede calcular mediante el método de los discos, pero en este caso habría que hacer dos integrales.

Ejemplo 1.17. Calculemos el volumen del sólido generado al girar la región limitada por las gráficas $y = x^3 + x + 1$, $x = 1$ e $y = 1$ alrededor de la recta $x = 2$.

Solución. En este caso recurrimos al método de las capas debido a la dificultad que plantea despejar x en la ecuación $y = x^3 + x + 1$ para aplicar el método de los discos.

Dibujando la gráficas, observamos que la distancia de cada rectángulo representativo al eje $x = 2$ viene dada por $p(x) = 2 - x$ y su altura viene dada por $h(x) = f(x) - 1 = x^3 + x$,



por tanto:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 (2-x)(x^3+x)\,dx = 2\pi \int_0^1 (2x^3 + 2x - x^4 - x^2)\,dx \\ &= 2\pi\left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1 = \frac{29\pi}{15} \text{ u.v. } \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 1.5. Se diseña un flotador cuya forma se obtiene rotando la gráfica de $y = 1 - \frac{x^2}{16}$, $-4 \leqslant x \leqslant 4$, alrededor del eje X, donde se mide x e y en dm. Calcula el volumen del flotador. (Solución: $\frac{64\pi}{15}\ dm^3$).

1.2.3. Aplicaciones físicas de la integral

1. Trabajo realizado por una fuerza variable.

El concepto de trabajo es importante para los científicos e ingenieros a la hora de determinar la energía necesaria para realizar diferentes tareas físicas; por ejemplo, es útil conocer la cantidad de trabajo realizado cuando una grúa

eleva una viga de acero, cuando se comprime un muelle, cuando se lanza un cohete o cuando un camión transporta una carga por una carretera.

En primer lugar, consideremos una fuerza constante en cada punto, que mueve un cuerpo en su misma dirección rectilínea una distancia d, entonces el trabajo realizado por dicha fuerza viene dado por $W = F\,d$ (Figura 1.15).

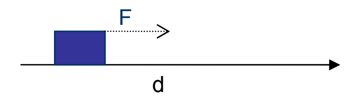


Figura 1.15: Fuerza constante y en la misma dirección que el desplazamiento.

Pero la fuerza F puede variar conforme el objeto cambia de posición (por ejemplo, al comprimir o estirar un muelle). Supongamos que queremos calcular el trabajo necesario para mover un cuerpo a lo largo de una línea recta desde $x = a$ hasta $x = b$ debido a una fuerza $F(x)$ que varía continuamente. Razonamos de forma análoga a los casos anteriores de cálculo de áreas y de volúmenes para llegar al concepto de integral. Para ello utilizamos las sumas de Riemann y los correspondientes principios físicos.

- Tomamos una partición regular del intervalo $[a, b]$.
- Para cada uno de los n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ consideramos c_i un punto cualquiera de dicho subintervalo y calculamos $F(c_i)$.
- Para pequeños valores de Δx_i la fuerza se considera con variaciones mínimas y es prácticamente constante, así pues el trabajo para mover dicho cuerpo desde x_{i-1} hasta x_i viene dado por
$$\Delta W_i = F(c_i)\Delta x_i.$$
- Podemos aproximar el trabajo total desde $x = a$ hasta $x = b$ mediante la suma:
$$W \approx \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i.$$
- Tomando límite cuando $n \to +\infty$, obtenemos, si existe el valor buscado,
$$W = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)dx.$$

Ejemplo 1.18. Para estirar un muelle desde su posición natural $\frac{1}{3}$ hemos realizado una fuerza de $10N$, calculemos qué trabajo debemos realizar para estirarlo $\frac{1}{3}$ más.

Solución. Por la ley de Hooke, el muelle ejerce una fuerza contraria al sentido de la deformación, dada por $F(x) = -k\,x$, donde k es una constante positiva característica del muelle.

Podemos determinar k con los datos del problema aplicando la ley anterior:

$$10 = k\frac{1}{3}, \quad \text{por tanto,} \quad k = 30\ N/m.$$

Así, el trabajo para estirar el muelle desde la posición $\frac{1}{3}$ hasta la posición $\frac{2}{3}$ será:

$$W = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 30\,x\,dx = 30\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1/3}^{2/3} = 5\ \text{N m}. \quad \blacksquare$$

⬢ **Ejercicio 1.6.** Si un módulo espacial pesa 15 toneladas (T) en la superficie terrestre, ¿Cuánto trabajo exige elevarlo a una altura de 800 millas?. No se tendrá en cuenta la resistencia del aire ni el peso del combustible (Radio Tierra $\approx$ 4000 millas). (Solución: 10,000 T-milla).

2. Vaciado de depósitos.

Consideremos un depósito lleno hasta $d\ m$ por debajo del borde, de un líquido homogéneo que pesa $w\ N/m^3$ (Figura 1.16). Supongamos que se bombea líquido desde la parte superior hasta que el nivel del líquido desciende a $c\ m$ por debajo del borde. Queremos calcular cuál es el trabajo realizado.

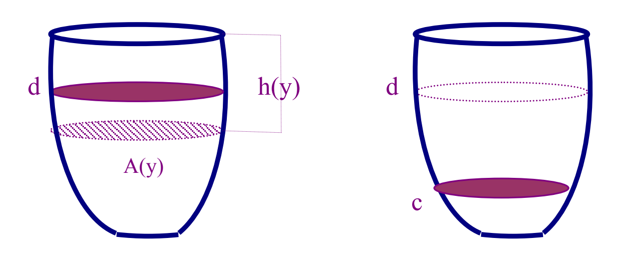


Figura 1.16: Vaciado de un depósito.

En la resolución del problema utilizamos la siguiente notación:

- $A(y)$: área de una sección transversal,
- $h(y)$: altura a la que hay que elevar el líquido,

para cada $y \in [c, d]$.

Construimos las sumas de Riemann que dan lugar a la integral correspondiente al vaciado de depósitos.

- Tomamos una partición regular de $[c, d]$. Para cada subintervalo $[y_{i-1}, y_i]$ sea c_i un punto intermedio de dicho subintervalo.
- El volumen del estrato correspondiente es: $\quad V_i = A(c_i)\Delta y_i$.
- El peso de dicho estrato es: $\quad w\,V_i$.

- El trabajo que hay que realizar para bombear este estrato es:

$$W_i = w\,A(c_i)\,h(c_i)\,\Delta y_i.$$

- Un valor aproximado del trabajo total viene dado por la suma de los trabajos realizados para bombear todos los estratos del líquido y el valor exacto se obtiene mediante el límite, si existe, cuando $n \to +\infty$ de dicha suma, es decir:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} wA(c_i)h(c_i)\Delta y_i = \int_c^d w\,A(y)\,h(y)\,dy.$$

Ejemplo 1.19. El tanque cónico de la Figura 1.17 se llena hasta 2 m del tope con un aceite que pesa w N/m^3, hallemos el trabajo que se requiere para bombear todo el aceite hasta el borde del tanque.

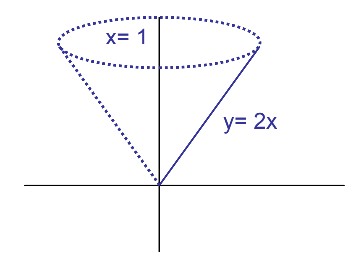


Figura 1.17: Tanque cónico.

Solución. Considerando los ejes de coordenadas como en la Figura 1.17, se tiene que $A(y) = \pi(\frac{y}{2})^2$ y $h(y) = 10 - y$. Puesto que el tanque está lleno hasta 2 m del borde superior, hay que bombear el aceite que ocupa la región desde $y = 0$ hasta $y = 8$, por tanto:

$$\begin{aligned} W = & \int_0^8 w\,\pi\,(\tfrac{y}{2})^2\,(10-y)\,dy = \frac{w\,\pi}{4}\int_0^8 (10y^2 - y^3)\,dy \\ = & \frac{w\,\pi}{4}\left[\frac{10y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^8 = \frac{w\,\pi}{4}(\frac{2048}{3}) = \frac{512}{3} w\pi \text{ N} \cdot \text{m}. \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio 1.7. Un depósito de agua semiesférico de 10m de radio se vacía mediante bombeo. Halla el trabajo realizado cuando el nivel del agua desciende de 2 a 4 m por debajo de la parte superior del depósito (densidad del agua: $\omega = 10^4 N/m^3$). (Solución: 5400π KN · m).

Ejercicio 1.8. Un tanque cónico lleno de agua reposa sobre su base que está a nivel del suelo siendo su eje vertical. El tanque tiene un radio de 5 m y una altura de 10 m. Calcula el trabajo realizado para vaciar el agua del depósito hasta el borde superior, si la densidad del agua es de $10^4 N/m^3$. (Solución: $625\pi 10^4$ KN · m).

3. Fuerza ejercida por un fluido.

Una de las aplicaciones de este apartado es la presión que se ejerce sobre una pared sumergida verticalmente, por ejemplo la fuerza que se ejerce sobre una presa. La Ley de Pascal es la que rige este principio: si se sumerge un objeto en un líquido, éste experimenta una fuerza del líquido que le rodea. Si la superficie está sumergida horizontalmente la fuerza es $F = P\,A$, siendo la presión P proporcional a la profundidad del objeto en el fluido, es decir, $P = w\,h$, donde w la densidad del líquido y h la profundidad del objeto. Por tanto, $F = w\,h\,A$, siendo A el área de dicho objeto.

Esta ley es muy utilizada en hidráulica y neumática. Fue uno de los principios que se utilizó para diseñar la prensa hidráulica.

Pero si la superficie está sumergida verticalmente en el fluido como en la Figura 1.18, entonces la presión ejercida sobre la superficie no es constante, varía con la profundidad y tenemos que recurrir al concepto de integral para resolver el problema.

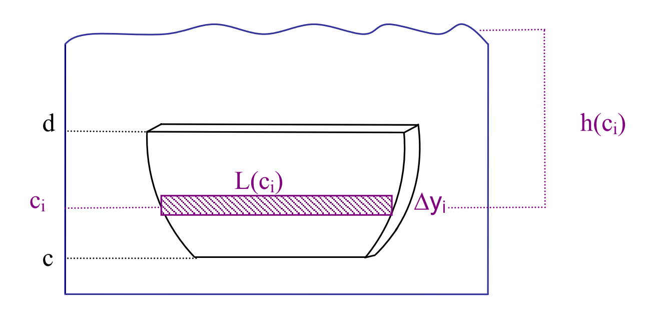
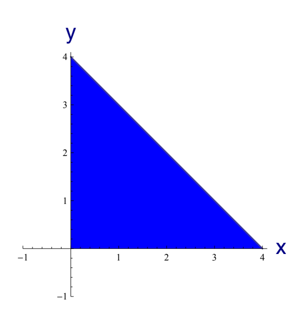


Figura 1.18: Pared vertical sumergida.

- Tomamos una partición regular del intervalo $[c, d]$ en n subintervalos.
- Consideramos su amplitud lo suficientemente pequeña de manera que $F_i = w\,h(c_i)\,L(c_i)\,\Delta y_i$, con $c_i \in [y_{i-1}, y_i]$,
- La fuerza total tendrá un valor aproximado que resulta de la suma de estas fuerzas
$$F \approx \sum_{i=1}^{n} w\,h(c_i)\,L(c_i)\,\Delta y_i.$$
- Tomando límite, si existe, obtenemos:
$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} w\,h(c_i)\,L(c_i)\,\Delta y_i = w \int_c^d h(y)\,L(y)\,dy.$$

⬢ **Ejemplo 1.20.** Calculemos la fuerza que ejerce el agua sobre una pared vertical que tiene forma de triángulo rectángulo cuyos catetos miden 4 m cada uno, siendo uno de ellos la base del triángulo situada a 4 m de profundidad. (Densidad del agua: 10000 N/m^3).



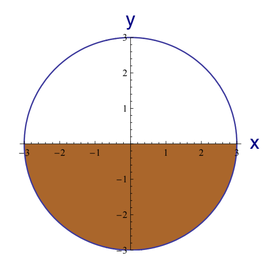
Pared vertical triangular.

Solución. Haciendo coincidir el eje X con la base del triángulo (uno de los catetos) y el eje Y con la altura del triángulo (el otro cateto) y situando el nivel del agua sobre la recta $y = 4$, tenemos que $h(y) = 4 - y$ y puesto que la hipotenusa del triángulo forma parte de la recta $y = 4 - x$, despejando tenemos que $L(y) = 4 - y$. Por tanto:

$$F = \quad w \int_0^4 h(y)\, L(y)\, dy = w \int_0^4 (4-y)^2\, dy$$

$$-w \left[\frac{(4-y)^3}{3} \right]_0^4 = -w(\frac{-64}{3}) = \frac{64{,}10^4}{3}\ N. \blacksquare$$

⬢ **Ejemplo 1.21.** Un conducto circular de agua de 6 m de diámetro se encuentra semilleno. Hallemos la fuerza que ejerce el agua sobre la compuerta que cierra el conducto.



Pared vertical circular.

Solución. Consideremos la compuerta (circular) que cierra el conducto y tomemos el origen de coordenadas en el centro de dicho círculo, de este modo $h(y) = -y$ y $L(y) = 2\sqrt{9 - y^2}$. Puesto que sólo está sumergida la mitad inferior, se tiene que:

$$F = \quad w \int_{-3}^0 2\sqrt{9 - y^2}(-y)\, dy = w \left[\frac{(9-y)^{3/2}}{3/2} \right]_{-3}^0 = \frac{2w}{3} 27 = 18{,}10^4\ \ N. \blacksquare$$

⬢ **Ejercicio 1.9.** La compuerta vertical de una presa tiene forma de trapecio isósceles de 8 m de base superior y 6 m de base inferior, con una altura de 5 m. ¿Cuál es la fuerza ejercida por el fluido sobre la compuerta si el borde superior está 4 m por debajo de la superficie del agua? (Solución: $\frac{670}{3}\omega\ N$).

⬢ **Ejercicio 1.10.** Los extremos de una artesa de agua tienen la forma de regiones parabólicas limitadas por $y = x^2 - 4$ e $y = 0$, donde las unidades son en metros. Suponiendo que la artesa está llena de agua, calcula la fuerza que ejerce el agua sobre uno de los extremos de la artesa. (Solución: $\frac{256}{15}\omega\ N$).

1.2.4. Ejercicios de la sección 1.2

1. Halla el área encerrada de la región del primer cuadrante limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 3$, $y = \frac{1}{2}x$, $x = \frac{1}{2}y^2$. (Solución: $2\pi - 4$ u.a.).

2. Halla el área encerrada de la región comprendida entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 4$ y $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$. (Solución: 0.973206 u.a.).

3. Calcula el volumen del cuerpo generado al girar la región limitada por $y = x^3$, $y = 8$ y $x = 0$ alrededor del eje Y. (Solución: $\frac{96\pi}{5}$ u.v.).

4. La recta $x = 2$ divide al círculo $(x-1)^2 + y^2 \leq 4$ en dos partes.
(a) Calcula el volumen generado al girar alrededor de la recta $y = 0$ la parte de mayor área. (Solución: 9π u.v.).
(b) Calcula el volumen generado al girar alrededor de la recta $x = 0$ la parte de menor área. (Solución: $\frac{8\pi^2}{3} + 2\sqrt{3}\pi$ u.v.).

5. Calcula la capacidad en m^3 de un depósito de aceite que tiene la forma del sólido de revolución obtenido al girar alrededor de la recta $x = 2$, la región acotada por $y = x^2$ y $y = 1$. (Solución: $\frac{16\pi}{3}\ m^3$).

6. Sea R la región del plano encerrada entre la parábola $y = -x^2 - 2x + 3$ y la recta $y = 3$. Calcula el volumen del sólido de revolución generado al girar dicha región alrededor de la recta $x = 2$. (Solución: 8π u.v.).

7. (Trabajo realizado para elevar una cadena). Una cadena de 20 m que pesa 5 kg por m yace en el suelo. ¿Cuánto trabajo se requiere para elevar uno de sus extremos hasta 20 m de altura de manera que quede toda extendida?. (Solución: 100 mkg).

8. (Trabajo realizado por un gas) Una cantidad de gas con un volumen inicial de 1 pie cúbico y una presión de 500 libras por pie cúbico se expande hasta ocupar un volumen de 2 pies cúbicos. Calcula el trabajo realizado por gas al expandirse. (Se supone que la presión es inversamente proporcional al volumen). (Solución: $500 \ln 2$ *pies·libra*).

9. Un depósito de retención es una alternativa a la rehabilitación de las redes de alcantarillado de un municipio por las muchas molestias que se pueden ocasionar (problemas de tráfico, molestias a los ciudadanos, etc.). Supongamos que uno de estos depósitos tiene forma de paraboloide de revolución obtenido al girar la curva $y = 2x^2 + 1$ $(0 \leq x \leq \sqrt{5})$ alrededor del eje Y. Si el depósito está lleno, ¿qué trabajo se requiere para vaciar su contenido por encima del borde del depósito? (Solución: $\frac{250}{3}\pi\omega$ u.t.).

10. Supongamos que un depósito de queroseno de calefacción de una casa tiene una fuga y hay que vaciar su contenido para repararlo. Calcula el trabajo que se requiere para vaciarlo bombeando el keroseno hasta una salida que está 1 m por encima de la parte superior del tanque si está lleno hasta la mitad. El tanque es cilíndrico de radio 2 m y altura 4 m. (Densidad del keroseno ω N/m^3) (Solución: $32\pi\omega$ N).

11. Calcula el trabajo necesario para vaciar todo el combustible de un tanque cilíndrico de 2 m de radio y 5 m de longitud, si éste se encuentra enterrado horizontalmente a 2 m de la superficie y la altura del surtidor es de 1 m. (Densidad del combustible ω N/m^3). (Solución: $100\pi\omega$ N).

12. Un camión transporta combustible en un depósito cuya sección transversal tiene forma de semicírculo de radio 20 dm. Si el peso del combustible es de 3 g/dm^3 y suponemos que el depósito está lleno, calcula la fuerza total ejercida por el líquido sobre uno de sus extremos. (Solución: 16000 N).

13. Un aljibe (depósito que recoge el agua de lluvia) tiene forma triangular (su sección transversal es un triángulo equilátero de 8 m de lado y vértice hacia abajo). Calcula la fuerza que ejerce el agua sobre uno de los extremos del aljibe cuando está lleno. Consideramos que la densidad del agua es 10^4 N/m^3. (Solución: 64 10^4 N).

1.3. INTEGRALES IMPROPIAS

Para definir la integral definida, se ha exigido que el integrando fuese una función acotada en un intervalo compacto, es decir, un intervalo cerrado y acotado. Si el intervalo sobre el que queremos integrar no es compacto o la función no está acotada se amplía el concepto de integral dando lugar a las *integrales impropias* o *generalizadas*. Veamos algunos ejemplos en los que aparece este tipo de integrales:

⬢ **Ejemplo 1.22.** En un ayuntamiento se propone un plan de recaudación de impuestos planteado de la forma siguiente. Después de x semanas, se prevé que se recauden $f(x) = xe^{3-x}$ miles de euros por mes. ¿Cuánto será lo recaudado en los tres primeros meses?. ¿Cuánto se recaudaría si el tiempo fuese ilimitado?.

⬢ **Ejemplo 1.23.** Si un módulo espacial pesa 15 toneladas en la superficie terrestre, ¿ cuánto trabajo exige elevarlo a una altura de 800 millas?. ¿ Cuánto trabajo es necesario para propulsar este módulo a una distancia infinita de la Tierra?. No se tendrá en cuenta la resistencia del aire ni el peso del combustible. (Radio Tierra $\approx$ 4000 millas)

Distinguiremos entre:

- Integrales impropias de primera especie: aquéllas en las que el intervalo de integración no está acotado (y por tanto, no es compacto).

- Integrales impropias de segunda especie: aquéllas en las que la función a integrar no está acotada, es decir, tiende a infinito en algún extremo del intervalo de integración. Por tanto, el intervalo de integración no es cerrado (no compacto).

1.3.1. Integrales sobre intervalos no acotados

Este tipo de integrales aparece cuando el intervalo sobre el que se integra no está acotado, es decir, intervalos de la forma $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$ ó $]-\infty,+\infty[$.

Definición 1.7. Sea $f:[a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ integrable en todo compacto $[a,t]$, $\forall t\geq a$. Se dice que f es **integrable** en $[a,+\infty[$ si existe el límite siguiente:

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx=\int_a^{+\infty}f(x)dx.$$

Esta integral recibe el nombre de **integral impropia de primera especie en $+\infty$** (ver Figura 1.19).

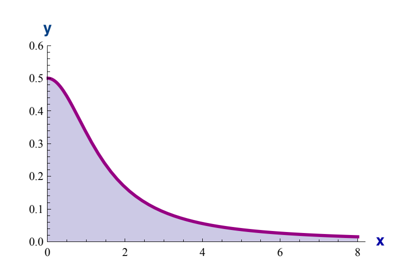


Figura 1.19: Integración sobre el intervalo $[a,+\infty[$.

Definición 1.8. Sea $f:]-\infty,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ integrable en todo compacto $[r,b]$, $\forall r\leq b$. Se dice que f es **integrable** en $]-\infty,b]$ si existe el límite siguiente:

$$\lim_{r\to-\infty}\int_r^b f(x)dx=\int_{-\infty}^{b}f(x)dx,$$

esta integral recibe el nombre de integral impropia de primera especie en $-\infty$ (ver Figura 1.20).

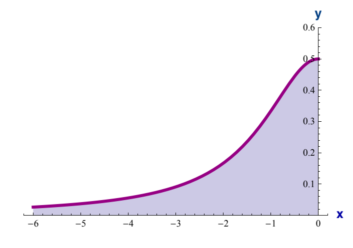


Figura 1.20: Integración sobre el intervalo $]-\infty,b]$.

■ **Definición 1.9.** Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre cualquier compacto $[r, t]$, $\forall r, t \in \mathbb{R}$. Entonces f es integrable en $]-\infty, +\infty[$ si existe

$$\lim_{\substack{t \to +\infty \\ r \to -\infty}} \int_r^t f(x)dx = \lim_{r\to-\infty} \int_r^c f(x)dx + \lim_{t\to+\infty} \int_c^t f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

$\forall c \in \mathbb{R}$. Esta integral recibe el nombre de **integral impropia de primera especie en $\pm\infty$** (ver Figura 1.21).

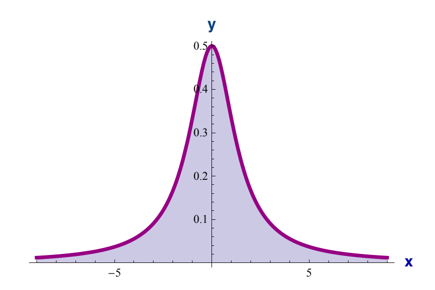


Figura 1.21: Integración sobre el intervalo $]-\infty, +\infty[$.

Podemos reducir estos tres casos al primero de ellos, la integral impropia en $+\infty$ procediendo de la siguiente manera:

- Para integrales impropias en $-\infty$ hacemos un cambio de variable en la integral, es decir, cambiamos x por $-x$:

  $$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \int_{+\infty}^{-b} f(-x)(-dx) = \int_{-b}^{+\infty} f(-x)dx.$$

  D este modo, reducimos la integral de primera especie en $-\infty$ a una de primera especie en $+\infty$.

- Para integrales impropias en $\pm\infty$ aplicamos la aditividad respecto del intervalo separando la integral en dos integrales correspondientes a integrales impropias en $+\infty$ y $-\infty$,

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

  Así pues, este caso se reduce a integrales impropias en $+\infty$ y $-\infty$.

En cada uno de los siguientes casos:

- Si el límite es un número finito se dice que la integral es convergente.
- Si el límite es infinito entonces es divergente.
- Si el límite no existe se dice que la integral es oscilante.

⬢ **Ejemplo 1.24.** Calculemos las siguientes integrales:

1. $\int_0^{+\infty} e^{-3x} dx$.

2. $\int_{-\infty}^0 4\cos x\, dx$.

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

4. $\int_{-\infty}^0 \dfrac{4x+1}{x^2-3x+2}$

Solución.

1. $$\int_0^{+\infty} e^{-3x} dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-3x} dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^t = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-3t}}{-3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

   Esta integral es convergente.

2. $$\int_{-\infty}^0 4\cos x\, dx = 4 \lim_{r\to-\infty} \int_r^0 \cos x\, dx = 4 \lim_{r\to-\infty} [\,\sin x\,]_r^0 = -4 \lim_{r\to-\infty} \sin r.$$

   Esta integral es oscilante ya que este límite no existe.

3. $$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x+\frac{1}{e^x}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \\
&= \lim_{r\to-\infty} \int_r^0 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx + \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \\
&= \lim_{r\to-\infty} [\arctan e^x]_r^0 + \lim_{t\to+\infty} [\arctan e^x]_0^t \\
&= \lim_{r\to-\infty} (\arctan 1 - \arctan e^r) \\
&+ \lim_{t\to+\infty} (\arctan e^t - \arctan 1) \\
&= \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

   Esta integral es convergente.

4. $$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^0 \frac{4x+1}{x^2-3x+2}\, dx = \lim_{r\to-\infty} \int_r^0 \left(\frac{-5}{x-1} + \frac{9}{x-2}\right) dx \\
= &\lim_{r\to-\infty} \left(-5\ln|x-1| + 9\ln|x-2|\right)_r^0 \\
= &\; 9\ln 2 + \lim_{r\to-\infty} \ln \frac{|x-1|^5}{|x-2|^9} = 9\ln 2 \ln \lim_{r\to-\infty} \frac{|x-1|^5}{|x-2|^9} \\
= &\; 9\ln 2 + \ln(0) = -\infty.
\end{aligned}$$

   Esta integral es divergente. ■

1.3.2. Integrales sobre intervalos no cerrados

En este caso trabajamos sobre intervalos no cerrados ($]a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$) o con funciones no acotadas en algún punto interior al intervalo.

■ **Definición 1.10.** Sea $f : [a, b\,[\longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en todo compacto $[a, t] \subset [a, b[$. Se dice que f es integrable en $[a, b\,[$ si existe el límite

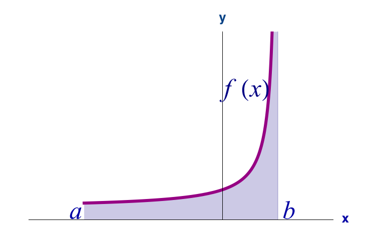
$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx = \int_a^{b^-} f(x)dx,$$

esta integral recibe el nombre de integral impropia de segunda especie en b.

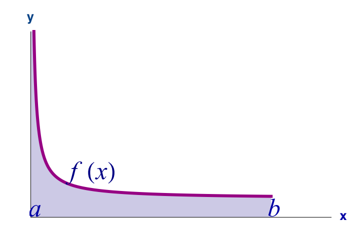
■ **Definición 1.11.** Sea $f : \,]\,a, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en todo compacto $[r, b] \subset \,]\,a, b\,]$. Se dice que f es integrable en $]\,a, b\,]$ si existe el límite

$$\lim_{r \to a^+} \int_r^b f(x)dx = \int_{a^+}^b f(x)dx,$$

esta integral recibe el nombre de integral impropia de segunda especie en a.



Integración en el intervalo $[a, b[$.



Integración en el intervalo $]a, b]$.

■ **Definición 1.12.** Sea $f : \,]\,a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en todo compacto $[r, t]$, $a < r < t < b$, entonces f será integrable en el intervalo $]a, b[$ si existen los límites

$$\lim_{\substack{r \to a^+ \\ t \to b^-}} \int_r^t f(x)dx = \lim_{r \to a^+} \int_r^c f(x)dx + \lim_{t \to b^-} \int_c^t f(x)dx = \int_{a^+}^{b^-} f(x)dx,$$

$\forall c \in \mathbb{R}$, y se llamará **integral impropia de segunda especie** en a y b.

En cada uno de los casos anteriores decimos que:

- La integral es convergentesi el límite es un número finito.
- Si el límite es infinito entonces es divergente.
- Si no existe el límite se dice que la integral es oscilante.

⬢ **Ejemplo 1.25.** Calculemos:

1. $\int_{0^+}^1 \dfrac{1}{x} dx$.

2. $\int_0^1 \dfrac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}dx$

3. $\int_0^1 \ln x\, dx$

4. $\int_1^2 \dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Solución.
1. Veamos que esta integral es divergente. En efecto:

$$\int_{0^+}^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to 0^+}[\ln x]_t^1 = \lim_{t\to 0^+}(0-\ln t) = \lim_{t\to 0^+}(-\ln t)$$

$$= -\lim_{t\to 0^+}(\ln t) = +\infty.$$

2. Veamos que esta integral es convergente. En efecto:

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}dx = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t (1-x)^{-\frac{2}{3}}\, dx = \lim_{t\to 1^-}\left[\, -3(1-x)^{1/3}\, \right]_0^t$$
$$= \lim_{t\to 1^-}(-3(1-t)^{1/3}+3) = 3.$$

3. Veamos que esta integral es convergente. En efecto:

$$\int_0^1 \ln x\, dx = \lim_{r\to 0^+}\int_r^1 \ln x\, dx = \lim_{r\to 0^+}[x\ln x - x]_r^1$$

$$= \lim_{r\to 0^+}(\ln 1 - 1 - r\log r + r) = \lim_{r\to 0^+}(-1 - r\ln r + r)$$

$$= -1 + \lim_{r\to 0^+} r - \lim_{r\to 0^+} r\ln r = (\text{aplicando l'Hôpital}) = -1 + \lim_{r\to 0^+}\frac{\ln r}{\frac{1}{r}}$$

$$= -1 + \lim_{r\to 0^+}\frac{\frac{1}{r}}{\frac{-1}{r^2}} = -1 + \lim_{r\to 0^+}\frac{-r^2}{r} = -1 + 0 = -1.$$

4. Veamos que esta integral es convergente. En efecto:

$$\int_1^{2^-}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = (\text{cambio: } x = 2\sin t) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dt =$$

$$= [t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Observemos que al hacer el cambio de variable la integral deja de ser impropia y se convierte en una integral definida sencilla. ■

1.3.3. Integrales de funciones no acotadas en intervalos compactos

Sea f una función acotada y continua en un intervalo compacto $[a, b]$ excepto en algún punto $c \in]a, b[$ donde

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

entonces la integral impropia $\int_a^b f$ es convergente si y sólo si $\int_a^{c^-} f$ y $\int_{c^+}^b f$ también son convergentes.

Ejemplo 1.26. Calculemos $\int_1^4 \frac{1}{(x-2)^2} dx$.

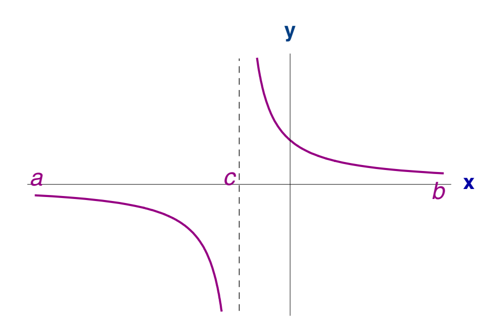


Figura 1.22: Gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$.

Solución. En este caso la función $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ presenta una discontinuidad infinita en $x = 2$ (ver Figura 1.22). Luego se tiene:

$$\int_1^4 \frac{dx}{(x-2)^2} = \int_1^{2^-} \frac{dx}{(x-2)^2} + \int_{2^+}^4 \frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$= \lim_{t \to 2^-} \int_1^t \frac{dx}{(x-2)^2} + \lim_{t \to 2^+} \int_t^4 \frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$= \lim_{t \to 2^-} \left[\frac{-1}{x-2} \right]_1^t + \lim_{t \to 2^+} \left[\frac{-1}{x-2} \right]_t^4$$

$$= \lim_{t \to 2^-} \left(\frac{-1}{t-2} \right) - 1 - \frac{1}{2} - \lim_{t \to 2^+} \left(\frac{-1}{t-2} \right) = +\infty.$$

Esta integral es divergente. ■

Ejercicio 1.11. Calcula $\int_1^3 \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x}}$. (Solución: divergente).

1.3.4. Propiedades de las integrales impropias

Las propiedades de las integrales propias se extienden, mediante procesos de paso al límite, a las integrales impropias.

En adelante, unificamos la notación de las integrales de primera y segunda especie: sea $[\,a,b\,[$ un intervalo no compacto tal que $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, escribiremos $\int_a^{\to b} f$ para denotar conjuntamente los dos tipos de integrales. Si consideramos el intervalo $]\,a,b\,]$ siendo $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, las denotamos $\int_{\to a}^{b} f$. Por último las impropias en $]\,a,b\,[$ donde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ las escribiremos $\int_{\to a}^{\to b} f$.

Enunciamos las propiedades más destacables para el primer caso, siendo análogas las propiedades para los otros dos.

(1) Linealidad. Si f y g son dos funciones reales, integrables en $[\,a,b\,[$, entonces también es integrable la función $hf+kg$ para cualesquiera $h,k \in \mathbb{R}$ y además:

$$\int_a^{\to b}(hf+kg) = h\int_a^{\to b} f + k\int_a^{\to b} g.$$

(2) Monotonía. Si f y g son integrables en $[\,a,b\,[$ y si se cumple $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in [\,a,b\,[$, entonces:

$$\int_a^{\to b} f \leqslant \int_a^{\to b} g.$$

(3) Regla de Barrow. Sea $f : [\,a,b\,[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[\,a,b\,[$ y sea $G : [\,a,b\,[\longrightarrow \mathbb{R}$ una primitiva de f en $[\,a,b\,[$. Si existe el límite siguiente, entonces:

$$\int_a^{\to b} f = \lim_{t\to b} G(t) - G(a) = [G(x)]_a^{\to b}$$

(4) Integración por partes. Si u y v son funciones de clase $\mathcal{C}^1$ en $[\,a,b\,[$ y son convergentes dos de los tres términos siguientes, también lo es el tercer término y se verifica:

$$\int_a^{\to b} u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^{\to b} - \int_a^{\to b} u'(x)v(x)dx.$$

(5) Cambio de variable. Sea $f : [\,a,b\,[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[\,a,b\,[$ y sea $\varphi : [\,\alpha,\beta\,[\longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1([\,\alpha,\beta\,[)$, siendo $-\infty < \alpha < \beta \leq +\infty$. Si $\varphi(\alpha) = a$ y $\varphi(t) \to b^-$ cuando $t \to \beta^-$ y además $\varphi([\,\alpha,\beta\,[) \subset [\,a,b\,[$, entonces:

$$\int_a^{\to b} f(x)dx = \int_\alpha^{\to\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Si una de ellas es convergente (divergente), la otra también.

⬢ **Ejemplo 1.27.** Calculemos:

(a) $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Solución. Hacemos el cambio $x = \sin t$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = [t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Observamos que al realizar este cambio de variable la integral deja de ser impropia

(b) $\int_0^1 x^2 \ln x dx$.

Solución. Aplicamos integración por partes:
$u(x) = \ln x$, $v'(x) = x^2 \to u'(x) = \dfrac{1}{x}$, $v(x) = \dfrac{x^3}{3}$, entonces:

$$\int_0^1 x^2 \ln x dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_{\to 0}^1 - \int_{\to 0}^1 \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 \ln x}{3} - \int_0^1 \frac{x^2}{3} dx$$
$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 \ln x}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_0^1 = -\frac{1}{9},$$

puesto que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^3 \ln x}{3} = 0$. ■

Ejercicio 1.12. Calcula $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^1 \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}dx$. (Solución: π).

Ejemplo 1.28. Estudiemos, según los valores de α, la convergencia de las integrales impropias siguientes:

(a) $I = \int_0^1 \dfrac{1}{x^\alpha} dx$.

Solución. Si $\alpha = 1$, entonces:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{0^+}^1 = 0 - \lim_{x \to 0^+} \ln x = +\infty.$$

Si $\alpha \neq 1$, entonces:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{0^+}^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} \text{ si } \alpha < 1 \\ +\infty \text{ si } \alpha > 1 \end{cases}$$

Por tanto, es convergente para $\alpha < 1$ y divergente para $\alpha \geq 1$.

(b) $I = \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^\alpha} dx$.

Solución. Si $\alpha = 1$, entonces:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \ln x - \ln 1 = +\infty.$$

Si $\alpha \neq 1$, entonces:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

$$= \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha < 1 \\ \dfrac{-1}{1-\alpha} \text{ si } \alpha > 1 \end{cases}$$

Por tanto, es convergente para $\alpha > 1$ y divergente para $\alpha \leq 1$. ■

⬢ **Ejercicio 1.13.** Estudia, según los valores de α, la convergencia de la siguiente integral: $\int_0^1 \dfrac{dx}{(1-x)^\alpha}$. (Solución: convergente para $\alpha < 1$ y divergente para $\alpha \geq 1$.)

1.3.5. Criterios de convergencia

En el estudio de la convergencia aparecen ciertas integrales impropias como *la integral de Dirichlet* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, que no tiene primitiva y comprobar la convergencia a partir de la definición puede ser bastante complejo; esto motiva que introduzcamos ciertos criterios de convergencia.

Los criterios que vamos a estudiar simplifican en la práctica el manejo de estas integrales y están basados en métodos de comparación; entre ellos, destacamos el *criterio del mayorante* y el *el criterio de comparación en el límite*. Antes de enunciarlos tendremos en cuenta algunas consideraciones.

En primer lugar, enunciaremos los criterios para las integrales impropias de la forma $\int_a^{\to b} f$; análogamente, se tienen criterios para las integrales $\int_{\to a}^{b} f$ y $\int_{\to a}^{\to b} f$.

Por otra parte, los criterios que damos se aplican a integrandos positivos, aunque por la aditividad de la integral bastará con exigir que exista $x_0 > a$ tal que $f(x) \geqslant 0$, para todo $x \geqslant x_0$ (Figura 1.23).

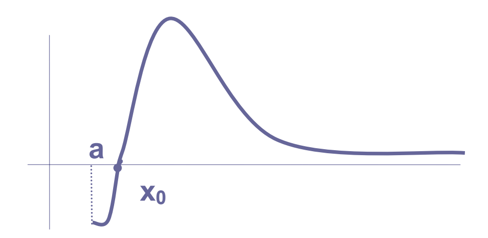


Figura 1.23: Función $f(x)$ con parte negativa.

Si se tiene que $f(x) \leq 0$, para todo $x \geqslant x_0$, entonces, para algún x_0, podemos aplicar los criterios vistos a la función positiva $g(x) = -f(x)$. La convergencia o divergencia de f será la obtenida para g (Figura 1.24).

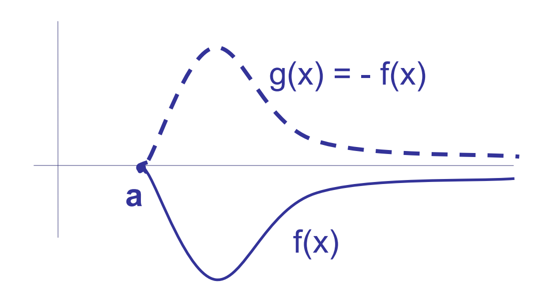


Figura 1.24: Gráficas de $f(x)$ y de $-f(x)$.

Sean $f, g : [\, a, b\, [\longrightarrow \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, y supongamos que existe un valor $x_0 > a$ tal que $f(x) \geqslant 0$ y $g(x) \geqslant 0$, para todo $x \geqslant x_0$. Teniendo en cuenta estas consideraciones enunciamos los criterios de convergencia siguientes:

(I) Criterio del mayorante.

Sean f y g tales que $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \geqslant x_0$, entonces:

(i) Si $\int_a^{\to b} g$ es convergente, entonces $\int_a^{\to b} f$ es convergente.

(ii) Si $\int_a^{\to b} f$ es divergente, entonces $\int_a^{\to b} g$ es divergente.

(II) Criterio de comparación en el límite.

Sea $L = \lim\limits_{x \to +\infty, b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, entonces:

(i) Si $L \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces $\int_a^{\to b} f$ y $\int_a^{\to b} g$ tienen el mismo carácter.

(ii) Si $L = 0$ y $\int_a^{\to b} g$ es convergente, entonces $\int_a^{\to b} f$ es convergente.

(iii) Si $L = \infty$ y $\int_a^{\to b} g$ es divergente, entonces $\int_a^{\to b} f$ es divergente.

Para poner en práctica los criterios de comparación es interesante disponer de algunas integrales de carácter conocido; se suelen tomar funciones de tipo potencial (ver Ejemplo 1.28b). Para las de primera especie podemos tomar $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} C & si \quad \alpha > 1 \\ D & si \quad \alpha \leqslant 1 \end{cases}, \qquad a > 0.$$

$$\int_{-\infty}^{b} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} C & si \quad \alpha > 1 \\ D & si \quad \alpha \leqslant 1 \end{cases}, \qquad b < 0.$$

Para las de segunda especie tenemos:

$$\int_a^{b^-} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} C & si \quad \alpha < 1 \\ D & si \quad \alpha \geqslant 1 \end{cases}.$$

$$\int_{a+}^{b} \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} C & si \quad \alpha < 1 \\ D & si \quad \alpha \geqslant 1 \end{cases}$$

Ejemplo 1.29. Estudiemos la convergencia de las siguientes integrales.

1. $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

   Solución. En primer lugar comprobamos que el integrando es positivo: $e^{-x^2} > 0$ para $x \geq 1$.

   Como $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ para $x \geq 1$ y la integral

   $$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} (-e^{-x}) + e^{-1} = \frac{1}{e}$$

   es convergente, entonces por el criterio del mayorante tenemos que la integral $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ también es convergente.

2. $\int_1^{+\infty} \dfrac{2+x^3}{1+x^6} dx$.

   Solución. El integrando es positivo $\forall x$. Aplicamos el criterio de comparación en el límite.

   Puesto que

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2+x^3}{1+x^6}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2+x^3)x^3}{1+x^6} = 1,$$

   la integral dada tiene el mismo carácter que la integral $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^3} dx$ que sabemos que es convergente.

3. $\int_0^1 \dfrac{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}{\sqrt{x(1-x)}} dx$.

   Solución. El integrando es positivo $\forall x$ y sabemos (mediante integración directa) que $\int_{\to 0}^{\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ es convergente. Acotemos el integrando:

   $$0 < \frac{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}{\sqrt{x(1-x)}} < \frac{8}{\sqrt{x(1-x)}}, \qquad \forall x$$

en particular para $0 < x < 1$. Puesto que la integral $\int_{\to 0}^{\to 1} \dfrac{8}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ es convergente, también lo es la integral dada. ■

⬣ **Ejercicio 1.14.** Estudia la convergencia de las siguientes integrales.

(a) $\int_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+1+\ln^2 x}$.

(b) $\int_1^{+\infty} \dfrac{3x^3+4x^2+4}{\sqrt[3]{8x^{10}+7}}dx$.

(c) $\int_1^3 \dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$.

(d) $\int_2^3 \dfrac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-2)}}dx$.

(Solución: (a)convergente, (b)divergente,(c) convergente, (d) convergente).

1.3.6. Convergencia absoluta

Si el integrando no tiene signo constante se intenta reducir éste al caso ya conocido de integrando positivo y para ello se introduce el concepto de *convergencia absoluta*. Se analiza la convergencia de $|f(x)|$ y a partir de ella se obtiene información de la integral dada.

■ **Definición 1.13.** Sea $f : [\,a, b\,[\longrightarrow \mathbb{R}$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, integrable en $[a, b[$ (esto implica que $|f|$ también es integrable en dicho intervalo). Decimos que la integral impropia $\int_a^{\to b} f$ es absolutamente convergente (absolutamente divergente) si $\int_a^{\to b} |f|$ es convergente (divergente).

Una definición análoga se tiene cuando f está definida en $]\,a, b\,]$ siendo $-\infty \leqslant a < b < +\infty$.

El teorema siguiente nos dice que toda integral impropia absolutamente convergente es convergente. El recíproco es, en general, falso.

■ **Teorema 1.5.** Si $\int_a^{\to b} f$ es absolutamente convergente, entonces $\int_a^{\to b} f$ es convergente, y además se verifica:

$$\left|\int_a^{\to b} f(x)dx\right| \leqslant \int_a^{\to b} |f(x)|\,dx.$$

⬣ **Ejemplo 1.30.** Estudiemos el carácter de la integral $\int_{-1}^{1} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x}}dx$.

Solución. Estudiemos la integral $\int_{-1}^{1} \left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\right| dx$ cuyo integrando es positivo. Como

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\right| \leq \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$$

y sabemos que $\int_{-1}^{1} \dfrac{1}{(1-x)^{1/2}} dx$ es convergente, por el criterio del mayorante sabemos que $\int_{-1}^{1} \left| \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x}} \right| dx$ es convergente, por tanto, la integral dada es absolutamente convergente y, por el teorema anterior se tiene que dicha integral es convergente.

Observemos que este ejemplo se podría resolver también descomponiendo la integral como suma de dos integrales, ya que el integrando es positivo para $0 \leq x < 1$. ■

⬢ **Ejercicio 1.15.** Estudia el carácter de las siguientes integrales:

(a) $\int_{2}^{+\infty} \dfrac{\cos^3 x}{x^2} dx$.

(b) $\int_{1}^{+\infty} \dfrac{\cos^3 x - \sin x}{2 - \sin x^2 + e^x} dx$.

(Solución: (a) convergente (b) convergente).

1.3.7. Ejercicios de la sección 1.3

1. Estudia el carácter de las siguientes integrales.

   (a) $\int_{1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x^2}\, dx$.

   (b) $\int_{1}^{4} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)(x-1)}}$.

   (c) $\int_{2}^{+\infty} \dfrac{dx}{\log x}$.

   (d) $\int_{\pi}^{+\infty} \dfrac{2+\cos x}{x}\, dx$.

   (e) $\int_{-1}^{1} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\, dx$.

   (f) $\int_{3}^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{x^4 - 81}}\, dx$.

   (g) $\int_{-\infty}^{0} \dfrac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$.

   (h) $\int_{1}^{+\infty} \dfrac{5 \sin 3x}{2x^2 + 5x + 3}\, dx$.

   (Soluciones: (a) convergente, (b) convergente, (c) divergente, (d) divergente, (e) convergente, (f) convergente, (g) convergente, (h) convergente).

2. Calcula el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ y el eje de abcisas. (Solución: 2 u.a.).

3. En un ayuntamiento se propone un plan de recaudación de impuestos planteado de la forma siguiente. Después de x meses, se prevé que se recauden $f(x) = xe^{3-x}$ miles de euros por mes. ¿Cuánto será lo recaudado en los tres primeros meses?. ¿Cuánto se recaudaría si el tiempo fuese ilimitado?. (Solución: $-4 + e^3$; e^3).

4. Halla el área de la región comprendida entre la gráfica de $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ y el eje de abcisas, en el intervalo $[1, +\infty[$. (Solución: 1 u.a.).

5. Si un módulo espacial pesa 15 toneladas (T) en la superficie terrestre, ¿ cuánto trabajo exige elevarlo a una altura de 800 millas?. ¿ Cuánto trabajo es necesario para propulsar este módulo a una distancia infinita de la Tierra?. No se tendrá en cuenta la resistencia del aire ni el peso del combustible. (Radio Tierra $\approx$ 4000 millas) (Solución: (a) 10000 T-milla; (b) 60000 T-milla).

6. Calcula el área de la región encerrada por la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{(\sqrt[3]{x} + 1)}$ y el eje de abcisas, en $\mathbb{R}$. (Solución: divergente).

TEMA 2

INTEGRACIÓN MÚLTIPLE

INTRODUCCIÓN

En este tema estudiaremos la integración de una función de varias variables sobre un conjunto D de $\mathbb{R}^n$. En particular, nos vamos a centrar en las integrales dobles y triples por sus aplicaciones en campos como la física o la ingeniería.

El concepto de integral para varias variables se construye análogamente al concepto de integral en una variable a partir de las sumas de Riemann, tal y como hemos visto en el tema anterior.

Los objetivos de este tema son:

- Generalizar el concepto de integral de Riemann de funciones de una variable a varias variables.

- Aplicando este concepto, deducir fórmulas para resolver determinados problemas como cálculo de áreas, volúmenes o aplicaciones físicas así como saber aplicarlas.

2.1. LA INTEGRAL DOBLE

La integración de funciones de varias variables o integración múltiple, tiene una motivación similar a la que tenía la integración en una variable; en este caso se trata de la determinación del volumen de un sólido en el espacio.

Si en las integrales simples, la integración tenía lugar sobre un intervalo, en el caso de más de una variable, el conjunto sobre el que se integra es, en general, más complejo. Por ello, comenzaremos estudiando la integración sobre intervalos compactos donde podrá seguirse el estudio visto para el caso de una variable y, posteriormente, pasaremos a conjuntos más generales.

Definimos la integral doble mediante sumas de Riemann, siguiendo un proceso análogo al realizado para definir la integral $\int_a^b f(x)dx$ apoyándonos en la interpretación geométrica de volumen bajo la gráfica de una función positiva. Es decir, queremos calcular el volumen del sólido delimitado por:

- La superficie $z = f(x, y)$ por arriba, el plano XY por abajo y los cuatro planos: $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ por los lados (ver Figura 2.1).

La idea geométrica que luego escribiremos de forma matemática es aproximar el volumen del sólido descrito.



Figura 2.1: Volumen de un sólido en el espacio.

Para ello calcularemos los volúmenes de prismas que se acercan al volumen dado. Cuantos más prismas mejores aproximaciones obtendremos para el volumen del sólido (ver Figura 2.2).

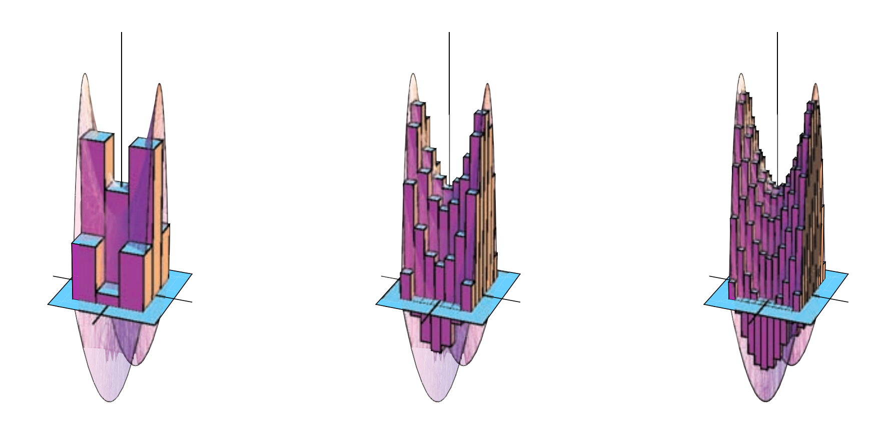


Figura 2.2: Volumen aproximado por 9, 49 y 121 prismas.

En el apartado siguiente formalizamos matemáticamente esta idea.

2.1.1. La integral doble como límite de sumas de Riemann

Consideremos una función de dos variables $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida sobre un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, acotada y con valores reales.

Sea P una partición regular de R de orden n, es decir, dos colecciones ordenadas de $n + 1$ puntos igualmente espaciados $\{x_i\}_{i=0}^n$, $\{y_j\}_{j=0}^n$ tales que:

$$x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b,$$

$$y_0 = c < y_1 < ... < y_n = d$$

con $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$ y $\Delta y = y_i - y_{i-1} = \dfrac{d-c}{n}$.

La partición P divide a R en $n \times n$ rectángulos cuyos interiores no se intersectan.

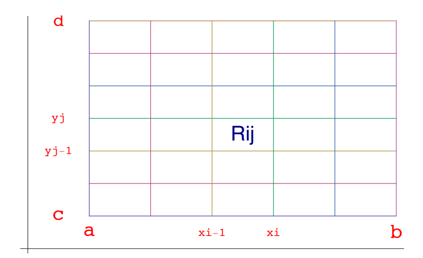


Figura 2.3: Partición de un intervalo R.

Sea R_{ij} el subintervalo $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ y sea $\vec{c}_{ij}$ un punto intermedio cualquiera de R_{ij}.

Formamos la suma de Riemann de f relativa a P

$$\sigma_n = \sum_{i,j=1}^{n} f(\vec{c}_{ij})\Delta x \Delta y = \sum_{i,j=1}^{n} f(\vec{c}_{ij})\Delta A$$

donde $\Delta A = \Delta x \Delta y$. Entonces,

■ **Definición 2.1.** Una función f es **integrable** sobre el rectángulo R si existe el siguiente límite, siendo dicho límite la integral doble de f en R,

$$\iint_R f = \iint_R f(x,y)\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} f(\vec{c}_{ij})\Delta x \Delta y.$$

Como ya hemos mencionado antes la integral doble tiene una interpretación geométrica básica como volumen de un sólido. Si una función f es continua y no negativa en el rectángulo R, es decir, la ecuación $z = f(x,y)$ representa una superficie que está por encima de R, el producto del área de cada subintervalo, dada por $\Delta x \Delta y$, por el valor $f(\vec{c}_{ij})$ es igual al volumen de un paralelepípedo cuya base es dicho rectángulo y cuya altura es $f(\vec{c}_{ij})$(ver Figura 2.4).

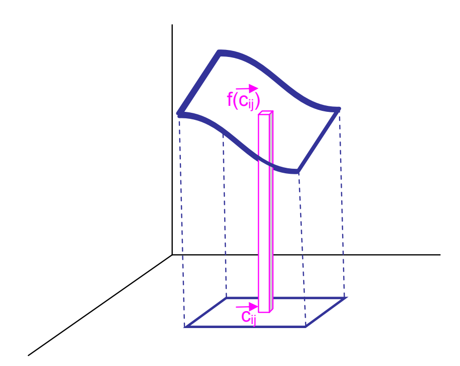


Figura 2.4: Prisma de base R_{ij}y altura $f(\vec{c}_{ij})$.

Por tanto, la suma de los volúmenes de todos estos paralelepípedos es una aproximación al volumen bajo la superficie $z = f(x, y)$ sobre el rectángulo R, es decir:

$$\text{volumen} \approx \sum_{i,j=1}^{n} f(\vec{c}_{ij})\Delta x \Delta y.$$

Cuando n tiende a infinito, y por tanto ΔA tiende a 0 se tiene el volumen buscado; en este caso, el volumen coincide con la integral doble,

$$\text{volumen de } V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} f(\vec{c}_{ij})\Delta x \Delta y = \iint_R f.$$

A partir de esta definición pueden probarse las siguientes propiedades, que nos proporcionan un amplio conjunto de funciones integrables.

■ **Propiedad 2.1.** Toda función continua definida sobre un rectángulo es integrable.

Aun cuando una función sea discontinua, podemos concluir su integrabilidad en R si el conjunto de sus discontinuidades no es "demasiado grande" (ver Figura 2.5).

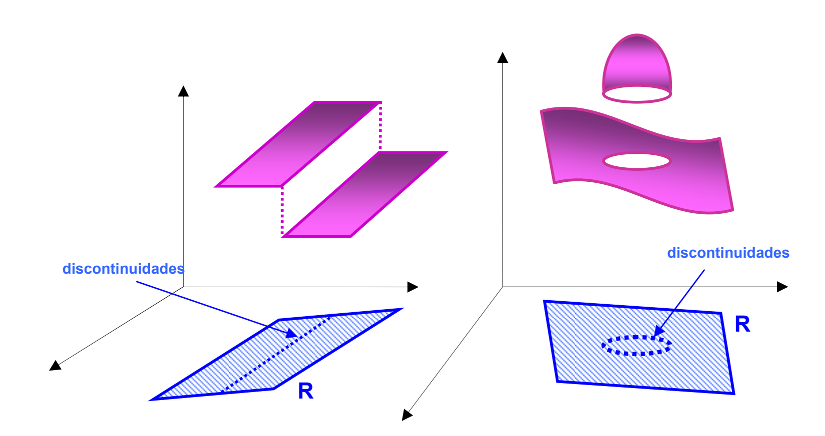


Figura 2.5: Funciones discontinuas.

■ **Propiedad 2.2.** Sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función definida y acotada en el rectángulo R. Si el conjunto de discontinuidades de f en R constituye la gráfica de una función continua, o unión finita de gráficas de funciones continuas, entonces f es integrable en R.

2.1.2. Propiedades de las integrales dobles

Las propiedades fundamentales de las integrales dobles son, esencialmente, las mismas que para la integral en una variable. Si f y g son funciones integrables en el rectángulo $R \subset \mathbb{R}^2$, se verifican las propiedades siguientes:

(1) Linealidad. $f+g$ y cf son integrables en R, $\forall c \in \mathbb{R}$ y además

$$\iint_R (f+g) = \iint_R f + \iint_R g, \quad \iint_R cf = c \iint_R f.$$

(2) Monotonía. Si $f(x,y) \leq g(x,y)$, $\forall (x,y) \in R$, entonces

$$\iint_R f \leq \iint_R g.$$

(3) Aditividad. Si R_i, $i = 1, ..., m$ son rectángulos disjuntos con $R = R_1 \cup ... \cup R_m$ rectángulo y f es integrable en cada R_i, entonces f es integrable en R y además

$$\iint_R f = \sum_{i=1}^{m} \iint_{R_i} f.$$

(4) Integrabilidad del módulo. La función $|f|$ también es integrable y además

$$\left| \iint_R f \right| \leq \iint_R |f|\,.$$

2.1.3. Cálculo de integrales dobles

Geométricamente, podemos intuir el cálculo de integrales dobles sobre rectángulos utilizando el principio de Cavalieri. Dado un cuerpo sólido, si $A(x)$ denota el área de su sección transversal medida a una distancia x del plano de referencia, entonces el volumen de dicho sólido está dado por $\int_a^b A(x)dx$, donde a y b son las distancias mínima y máxima a partir del plano de referencia.

Consideremos la región sólida bajo la gráfica $z = f(x,y)$ definida en el rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$, donde f es continua y no negativa. La sección transversal determinada por un plano cortante $x = x_0$ es la región plana bajo la gráfica de $z = f(x_0,y)$ desde $y = c$ hasta $y = d$; por tanto, su área es $A(x_0) = \int_c^d f(x_0,y)dy$ (ver Figura 2.6).

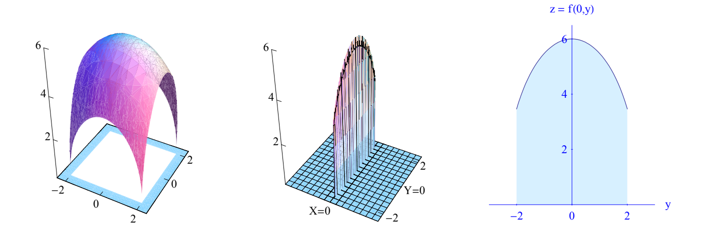


Figura 2.6: Sección definida por el plano cortante $x = x_0$.

El volumen $V = \int\int_R f(x,y)dA$ de la región es

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx.$$

Esta integral se conoce como integral iterada pues se obtiene integrando respecto a y y luego respecto a x.

Invirtiendo los papeles de x y de y (ver Figura 2.7), obtenemos

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy$$

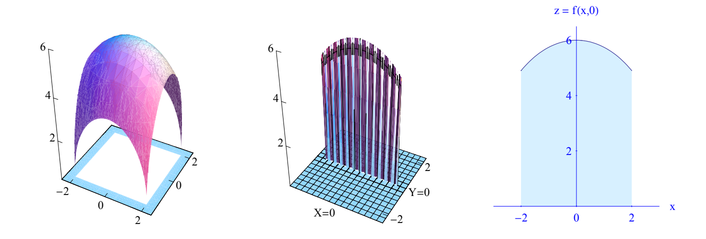


Figura 2.7: Sección definida por el plano cortante $y = y_0$.

El teorema de Fubini demuestra que podemos calcular la integral doble mediante integrales reiteradas.

■ **Teorema 2.1** (Teorema de Fubini)**.** Si f es una función continua definida en un rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$. Entonces:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.$$

Este teorema se puede generalizar al caso en que f no sea necesariamente continua, pero el conjunto de sus discontinuidades dan lugar a una unión finita de gráficas de funciones continuas.

En el cálculo de integrales dobles sobre rectángulos, cuando realicemos una iterada respecto de una de las variables, consideraremos que la otra variable está fija, es decir, se comporta como una constante.

⬢ **Ejemplo 2.1.** Calculemos $\int_{-1}^2 \int_0^3 (3xy^3 - 2x^2y)\ dx\, dy$.

Solución. Integramos en primer lugar respecto de x en el intervalo $[0,3]$:

$$\int_0^3 \left(3xy^3 - 2x^2y\right) dx = \left[\frac{3x^2}{2}y^3 - 2\frac{x^3}{3}y\right]_{x=0}^{x=3} = \frac{27}{2}y^3 - 18y$$

y el resultado lo integramos respecto de y en el intervalo $[-2,1]$:

$$\int_{-1}^2\int_0^3 \left(3xy^3 - 2x^2y\right)\ dx\, dy = \int_{-1}^2 \left(\frac{27}{2}y^3 - 18y\right) dy = \left[\frac{27y^4}{8} - 9y^2\right]_{-1}^2$$

$$= (54-36) - \left(\frac{27}{8} - 9\right) = \frac{189}{8}. \ ■$$

Ejemplo 2.2. Verifiquemos que al intercambiar el orden de integración no se altera el resultado.

Solución. Calculamos ahora $\int_0^3 \int_{-1}^2 (3xy^3 - 2x^2y)\ dy\, dx$. Para ello, integramos en primer lugar respecto de y :

$$\int_{-1}^2 (3xy^3 - 2x^2y)\ dy = \left[3x\frac{y^4}{4} - x^2y^2\right]_{y=-1}^{y=2} = (12x - 4x^2) - (\frac{3x}{4} - x^2)$$
$$= \frac{45x}{4} - 3x^2,$$

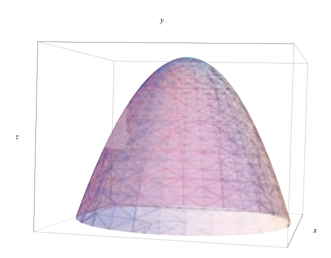
y el resultado lo integramos respecto de x en el intervalo $[0, 3]$. Por tanto,

$$\int_0^3 \int_{-1}^2 (3xy^3 - 2x^2y)\ dy\, dx = \int_0^3 \left(\frac{45x}{4} - 3x^2\right) dx = \left[\frac{45x^2}{8} - x^3\right]_0^3$$

$$= \left(\frac{45\ 9}{8} - 27\right) = \frac{189}{8},$$

que coincide con el del Ejemplo 2.1. ■

Ejemplo 2.3. Calculemos el volumen bajo la superficie $z = 6 - (x^2 + y^2)$, sobre el plano XY y limitada lateralmente por los planos $x = -2$, $x = 2$, $y = -2$ y $y = 2$.



Volumen bajo la superficie $z = 6 - (x^2 + y^2)$.

Solución. Puesto que esta función es positiva, el volumen viene dado por:

$$V = \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 \left(6 - (x^2 + y^2)\right)\ dx\, dy = \int_{-2}^2 \left[6y - x^2y - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^2\ dx =$$

$$= \int_{-2}^2 \left[\frac{56}{3} - 4x^2\right]\ dx = \left[\frac{56x}{3} - \frac{4x^3}{3}\right]_{-2}^2 = \frac{160}{3}\text{u.v.}\ ■$$

Ejercicio 2.1. Calcula $\int_{-2}^1 \int_0^1 (x^2y^3 + 2y^2x)\ dx\ dy$. (Solución: $\frac{7}{4}$).

Ejercicio 2.2. Halla $\int_0^1 \int_1^2 (x^2y^3 - 2y\, e^{3x})\, dy\, dx$. (Solución: $\frac{9}{4} - e^3$).

2.1.4. La integral doble sobre regiones más generales

Nuestro próximo objetivo es calcular integrales dobles sobre regiones de integración más generales. Trabajaremos con tres tipos especiales de regiones que llamaremos regiones simples o elementales del plano y que definimos a continuación.

■ **Definición 2.2.** Una región D del plano es de **tipo** 1 si se puede expresar del siguiente modo:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\},$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son funciones continuas definidas en el intervalo $[a, b]$ cumpliendo que $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)\ \forall x \in [a, b]$ (ver Figura 2.8).

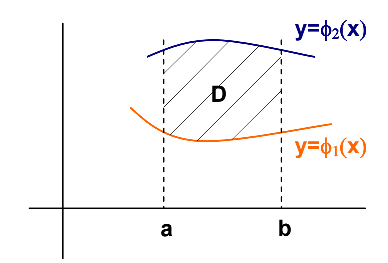


Figura 2.8: Región de tipo 1.

■ **Definición 2.3.** Una región D es una región de **tipo** 2 si se puede expresar de la forma:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\},$$

donde ψ_1 y ψ_2 son funciones continuas definidas en el intervalo $[c, d]$ cumpliendo que $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)\ \forall y \in [c, d]$ (ver Figura 2.9).

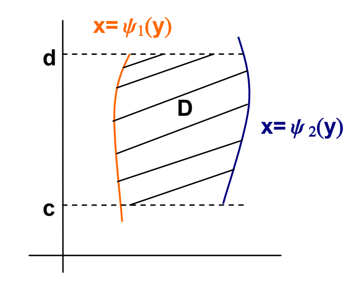
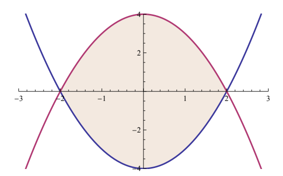


Figura 2.9: Región de tipo 2.

■ **Definición 2.4.** Una región D es de **tipo** 3 si se puede descomponer, mediante un número finito de cortes verticales u horizontales, en regiones de tipo 1 y 2.

Ejemplo 2.4. Veamos que la región D comprendida entre las parábolas $y = 4 - x^2$ e $y = x^2 - 4$ es una región de tipo 1.



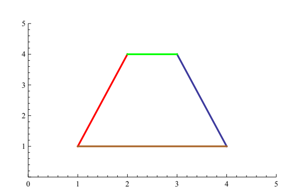
Región comprendida entre las parábolas.

Solución. En efecto, al dibujar la región observamos que, si $\phi_1(x) = x^2 - 4$ y $\phi_2(x) = 4 - x^2$, podemos escribir esta región de la forma:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2,\ x^2 - 4 \leq y \leq 4 - x^2\}. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 2.5. Veamos que la región T limitada por el trapecio de vértices $A = (1, 1)$, $B = (4, 1)$, $C = (2, 4)$ y $D = (3, 4)$ es una región de tipo 2.



Región limitada por el trapecio.

Solución. Calculando las ecuaciones de las rectas que definen el trapecio, podemos escribir T de la forma:

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y),\ 1 \leq y \leq 4\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y + 2}{3} \leq x \leq \frac{13 - y}{3},\ 1 \leq y \leq 4\}. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 2.6. Veamos que la región S limitada por la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ es una región de tipo 1 y también una región de tipo 2.

Solución. S puede considerarse como región tipo 1 (ver Figura 2.10):

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$
$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1,\ -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}.$$

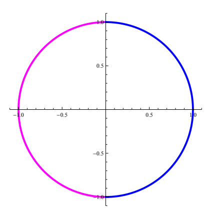


Figura 2.10: Región S como tipo 1.

Pero también, puede considerarse como región tipo 2 (ver Figura 2.11):

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1,\ \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1,\ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}. \ \blacksquare \end{aligned}$$

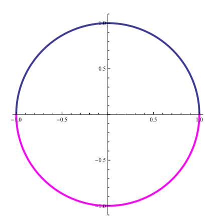


Figura 2.11: Región S como tipo 2.

Ejemplo 2.7. Veamos que la región R limitada por el paralelogramo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (3, 1)$, $C = (4, 4)$ y $D = (1, 3)$ es una región de tipo 3.

Solución. Esta región no se puede expresar como una región de tipo 1 o de tipo 2. Pero sí podemos verla como unión de varias regiones de tipo 1 ó 2. Por ejemplo, podemos dividirla en tres regiones de tipo 1 mediante las rectas verticales $x = 1$ y $x = 3$ (ver Figura 2.12).

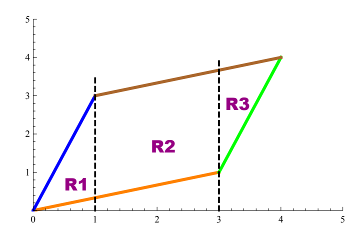


Figura 2.12: Región de tipo 3.

De este modo $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ donde:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ \frac{x}{3} \leq y \leq 3x\} \\ R_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3,\ \frac{x}{3} \leq y \leq \frac{x+8}{3}\} \\ R_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x \leq 4,\ 3x - 8 \leq y \leq \frac{x+8}{3}\}. \ \blacksquare \end{aligned}$$

■ **Nota 2.1.** Damos una definición informal e intuitiva de tres conceptos matemáticos que aparecerán en este tema y en el siguiente.

- Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ es un *punto interior* a un conjunto D, no solamente está en D sino que además hay una pequeña zona alrededor de $\vec{x}$ que permanece en D, es decir, todos los puntos suficientemente cercanos a $\vec{x}$ están en D. Al conjunto de todos los puntos interiores de D se le llama *interior* de D y se denota por $Int\, D$.

- Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ es un *punto exterior* a un conjunto D, no solamente está fuera de D sino que además hay una pequeña zona alrededor de $\vec{x}$ que permanece fuera de D, es decir, todos los puntos suficientemente cercanos a $\vec{x}$ están fuera de D. Al conjunto de todos los puntos exteriores de D se le llama *exterior* de D y se denota por $Ext\, D$.

- Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ es un *punto frontera* de un conjunto D, si hay algunos puntos suficientemente cercanos a $\vec{x}$ que están fuera de D y otros que están dentro. Al conjunto de todos los puntos frontera de D se le llama *frontera* de D y se denota por ∂D o $Fr\, D$.

A continuación vamos a extender la definición de integral doble, de modo que podamos integrar sobre las regiones elementales estudiadas anteriormente.

■ **Definición 2.5.** Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua con D región elemental del plano y sea R un rectángulo que contiene a D. Extendemos f a una función f^* definida en R por:

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin D \text{ y } (x,y) \in R \end{cases}$$

(ver Figura 2.13).

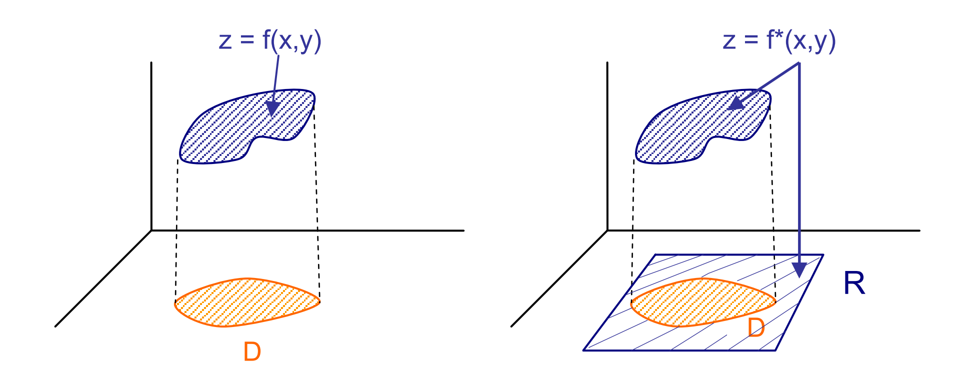


Figura 2.13: Definición de la función f^* en R.

La función f^* está acotada (pues f lo está) y es continua excepto quizás en la frontera de la región D, pero la frontera de D está formado por gráficas

de funciones continuas, por tanto, f^* es integrable en R y podemos definir la integral doble de f sobre D como:

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R f^*(x,y)dA.$$

Si $f(x,y) \geq 0$ en D, podemos interpretar $\int\int_D f(x,y)dA$ como el volumen de la región de $\mathbb{R}^3$ entre la gráfica de f y D. Como veremos al calcular estas integrales, el valor de la integral no depende del rectángulo R escogido.

Si $R = [a,b] \times [c,d]$ es un rectángulo que contiene a D:

$$\iint_D f = \iint_R f^* = \int_a^b \int_c^d f^*(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f^*(x,y)\,dx\,dy.$$

Supongamos que D es una región de tipo 1, determinada por las funciones $\phi_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$. Consideremos la integral iterada

$$\int_a^b \int_c^d f^*(x,y)dydx$$

y consideremos $\int_c^d f^*(x,y)dy$ para una x fija.

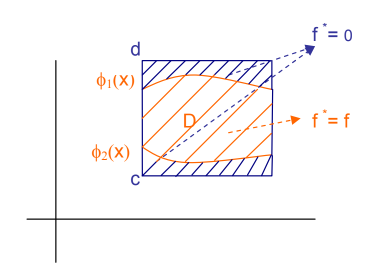


Figura 2.14: Dominio de la función f^*en R.

Como por definición $f^*(x,y) = 0$ si $y < \phi_1(x)$ o $y > \phi_2(x)$ (ver Figura 2.14), obtenemos:

$$\int_c^d f^*\,dy = \int_c^{\phi_1(x)} \underbrace{f^*}_{0}\,dy + \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \underbrace{f^*}_{f}\,dy + \int_{\phi_2(x)}^{d} \underbrace{f^*}_{0}\,dy = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f\,dy$$

Se obtiene, por tanto, el siguiente resultado:

■ **Teorema 2.2.** Sea f una función continua y sea D una región de tipo 1 determinada por las funciones ϕ_1 y ϕ_2, entonces:

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Análogamente, se obtiene la definición de integral doble sobre regiones de tipo 2:

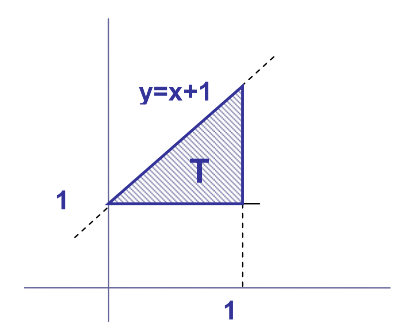
■ **Teorema 2.3.** Sea D una región de tipo 2 determinada por las funciones ψ_1 y ψ_2 y sea f una función continua en D, entonces:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

De estas fórmulas se sigue que $\iint_D f(x,y)\,dA$ es independiente de la elección del rectángulo R que contiene a D, usado en la definición.

Ejemplo 2.8. Hallemos $\int\int_T (4x^2y-3x)\,dA$ donde T es la región formada los puntos (x,y) tales que $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le x+1$.

Solución. Dibujando la región T, podemos observar que es de tipo 1:



Región T.

Por tanto:

$$\int\int_T (4x^2y-3x)\,dA = \int_0^1 \left(\int_1^{x+1} (4x^2y-3x)\,dy \right) dx =$$

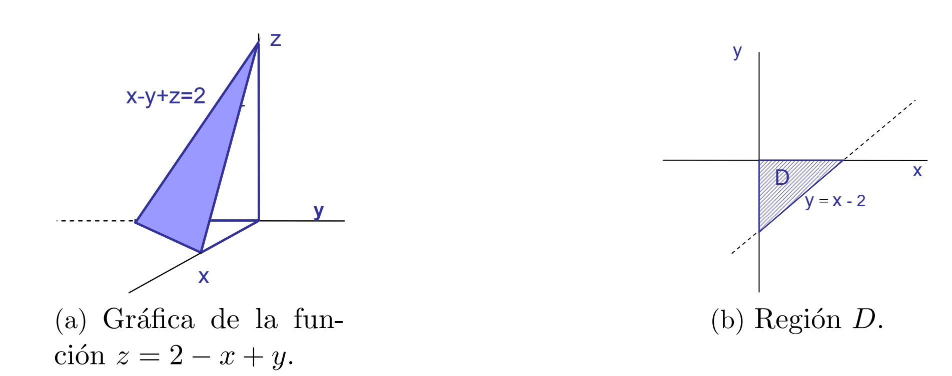
$$= \int_0^1 \left[2x^2y^2 - 3xy\right]_{y=1}^{y=x+1} dx = \int_0^1 \left(2x^4+4x^3-3x^2\right) dx =$$

$$= \left[\frac{2x^5}{5} + x^4 - x^3\right]_0^1 = \frac{2}{5}. \ \blacksquare$$

Ejemplo 2.9. Hallemos el volumen del tetraedro que está acotado por los planos $x-y+z=2$, $x=0$, $y=0$ y $z=0$.

Solución. Observamos que el volumen del tetraedro es el volumen bajo la función definida por el plano, es decir $f(x,y)=2-x+y$, sobre la región D que constituye la base y está definida por:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ x-2 \le y \le 0\}.$$



(a) Gráfica de la función $z = 2 - x + y$.

(b) Región D.

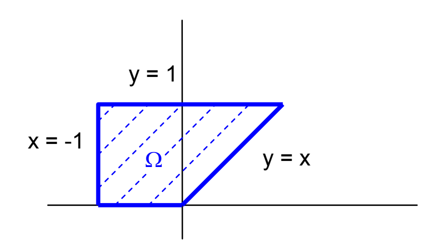
Regiones de integración.

D es una región de tipo 1. Por tanto, el volumen viene dado por:

$$V = \int\int_D (2 - x + y)dA = \int_0^2 \left(\int_{x-2}^0 (2 - x + y)\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left[(2-x)\, y + \frac{y^2}{2} \right]_{x-2}^0 dx = \int_0^2 \frac{(x-2)^2}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3} \text{ u.v. } \blacksquare$$

Ejemplo 2.10. Hallemos $\iint_\Omega (xy - y^3)\, dx\, dy$, siendo Ω la región de la figura:



Solución. La región Ω es de tipo 2, ya que podemos expresarla como:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, \, -1 \leq x \leq y\}$$

por tanto,

$$\iint_\Omega (xy - y^3)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{-1}^y (xy - y^3)\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2 y}{2} - xy^3 \right]_{-1}^y dy$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{y^3}{2} - y^4 - \frac{y}{2} \right) dy = \left[-\frac{y^4}{8} - \frac{y^5}{5} - \frac{y^2}{4} \right]_0^1 = -\frac{23}{40}. \blacksquare$$

Si D es de tipo 1 y 2 a la vez, podemos usar cualquiera de las dos fórmulas pudiéndose intercambiar el orden de integración. El cambio de orden puede ser de utilidad si se tiene una integral difícil de calcular.

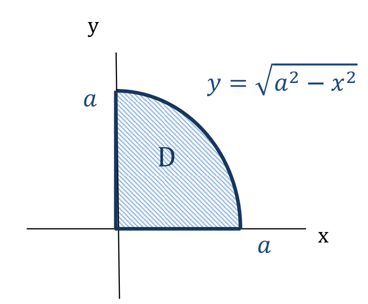
Ejemplo 2.11. Evaluemos $\int_0^a \int_0^{(a^2-x^2)^{1/2}} (a^2 - y^2)^{1/2} dy dx$.

Solución. En este caso, $0 \le x \le a$, $0 \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}$, por tanto esta integral equivale a la integral:

$$\iint_D \sqrt{a^2 - x^2}\, dA$$

donde D es la parte del disco de radio a y centro en $(0, 0)$ situada en el primer cuadrante. D es una región de tipo 1, pero también se puede expresar como región de tipo 2,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le a,\ 0 \le x \le \sqrt{a^2 - y^2}\}$$



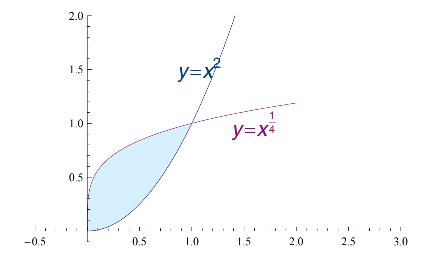
Región D.

En este caso, cambiando el orden de integración la integral queda más sencilla:

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{a^2 - y^2}\, dA &= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2 - y^2}\, dx\, dy = \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dx\, dy \\ &= \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\sqrt{a^2 - y^2} dy = \int_0^a \left(a^2 - y^2\right) dy = \left[a^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_0^a \\ &= \frac{2a^3}{3}. \blacksquare\end{aligned}$$

Ejercicio 2.3. Halla el volumen de la región limitada por la superficie $f(x, y) = e^{-x^2}$ y los planos $y = 0$, $y = x$, $x = 1$ y $z = 0$. (Solución: $\dfrac{e-1}{2e}$ u.v.).

Ejercicio 2.4. Calcula $\iint_\Omega (\sqrt{x} - y^2) dxdy$ siendo Ω la región de la figura:



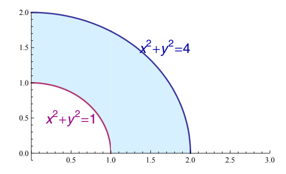
(Solución: $\dfrac{1}{7}$).

Las propiedades de las integrales dobles vistas para rectángulos también son válidas para regiones elementales. En particular, la propiedad de aditividad de la región de integración nos permite integrar sobre regiones de tipo 3. Así, si una región D está dividida en dos subregiones D_1 y D_2 ($D = D_1 \cup D_2$), entonces:

$$\int\int_D f dA = \int\int_{D_1} f dA + \int\int_{D_2} f dA.$$

Ejemplo 2.12. Calculemos la integral $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$ donde D es la cuarta parte, situada en el primer cuadrante, del anillo circular limitado por las circunferencias $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ y los ejes coordenados.

Solución. Esta región es de tipo 3, luego hay que expresarla como unión de regiones de tipo 1 ó 2.



Región D.

Mediante la recta vertical $x=1$, tenemos que $D = D_1 \cup D_2$ con:

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\},$$
$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}.$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\iint_D (x+y)\,dA &= \iint_{D_1} (x+y)\,dA + \iint_{D_2} (x+y)\,dA \\
&= \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x+y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x+y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx + \int_1^2 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \int_0^1 (x\sqrt{4-x^2} - x\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{2})dx + \int_1^2 (x\sqrt{4-x^2} + \frac{4-x^2}{2})dx \\
&= \left[-\frac{(4-x^2)^{3/2}}{3} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3} + \frac{3x}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{(4-x^2)^{3/2}}{3} + 2x - \frac{x^3}{6}\right]_1^2 \\
&= \frac{14}{3}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.5. Calcula la integral de la función $f(x,y) = x+y+1$ sobre la región R limitada por las rectas $y-x=1$, $y-x=-1$, $y+x=1$ e $y+x=2$. (Solución: $\frac{5}{2}$).

La siguiente propiedad nos permite utilizar la integral doble para el cálculo de áreas, ya que si se integra la función $f(x, y) = 1$ sobre una región elemental D del plano, se obtiene el área $A(D)$ de dicha región:

■ **Propiedad 2.3.** Sea D una región elemental del plano, entonces se cumple:

$$\iint_D dA = A(D).$$

siendo $A(D)$ el área de la región D.

Esta propiedad es fácil de comprobar aplicando las fórmulas vistas anteriormente.

Si D es una región de tipo 1, se tiene:

$$\iint_D dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dx\, dy = \int_a^b (\phi_2(x) - \phi_1(x))\, dx = A(D).$$

Si D es una región de tipo 2, se tiene:

$$\iint_D dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d (\psi_2(y) - \psi_1(y))\, dy = A(D).$$

Si D es una región de tipo 3, se aplica la propiedad de aditividad de la región de integración junto con las fórmulas anteriores y se llega al resultado deseado.

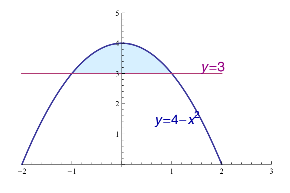
⬢ **Ejemplo 2.13.** Usando una integral doble, hallemos el área de la región D encerrada entre la gráfica de la función $y = 4 - x^2$ y la recta $y = 3$.

Solución. Calculamos en primer lugar la intersección de ambas curvas:

$$4 - x^2 = 3 \longrightarrow x^2 - 1 = 0 \longrightarrow x = \pm 1$$

Por tanto se tiene:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 3 \leq y \leq 4 - x^2\}$$



Región D.

El área vendrá dada por:

$$A(D) = \iint_D dx\, dy = \int_{-1}^{1} \int_3^{4-x^2} dy\, dx = \int_{-1}^{1} [y]_3^{4-x^2}\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}. \blacksquare$$

También se verifica un importante resultado análogo al teorema del valor medio para integrales simples:

■ **Teorema 2.4.** (Teorema del valor medio para integrales dobles). Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y sea D una región elemental. Entonces, existe un punto $(x_0, y_0) \in D$ tal que

$$\iint_D f(x,y)dA = f(x_0, y_0)A(D)$$

donde $A(D)$ denota el área de D.

A partir de este resultado definimos el *promedio integral*

$$p = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x,y)dA.$$

⬣ **Ejemplo 2.14.** La función densidad de una plancha metálica viene dada por $\delta(x,y) = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$. La plancha tiene forma circular con 6 dm de radio. Calculemos la densidad promedio de dicha plancha.

Solución. Aplicando el teorema del valor medio, la densidad media vendrá dada por:

$$\delta_m = \frac{1}{A(P)} \iint_P \delta(x,y)dA = \frac{1}{36\pi} \iint_P \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}dx\,dy$$

siendo P la región plana dada por:

$$P : \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 36\right\}.$$

El cálculo de esta integral tiene ciertas dificultades que pueden simplificarse con un cambio de variables que veremos a continuación. ■

2.1.5. Integrales dobles en coordenadas polares

Veamos ahora cómo calcular integrales dobles cuando la región de integración está expresada en coordenadas polares (r, θ) (ver apéndice A). Sea S la región del plano polar $S = [R_1, R_2] \times [\alpha, \beta]$ (ver Figura 2.15).

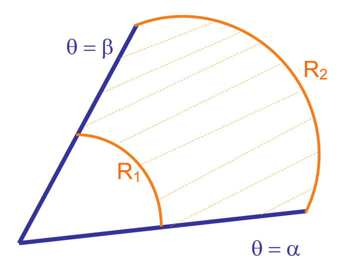


Figura 2.15: Región en coordenadas polares.

Construimos las sumas de Riemann de manera análoga al caso de coordenadas cartesianas.

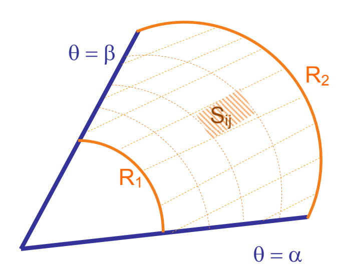


Figura 2.16: Subsectores en coordenadas polares.

- En primer lugar tomamos una partición regular de S en $n \times n$ subintervalos S_{ij} (ver Figura 2.16).
- En este caso ΔA_{ij} representa el área de cada elemento S_{ij} de la partición, pero en el plano polar no son rectángulos sino segmentos circulares. El área de cada segmento S_{ij} es el área del sector de radio r_i menos el área del sector de radio r_{i-1}, por tanto:

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta_j - \frac{1}{2} r_{i-1}^2 \Delta\theta_j = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta_j =$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{(r_i + r_{i-1})}_{\overline{r}_i} \underbrace{(r_i - r_{i-1})}_{\Delta r_i} \Delta\theta_j \simeq r_i \Delta r_i \Delta\theta_j.$$

- Una aproximación del volumen la obtenemos mediante las sumas de Riemann

$$V \simeq \sum_{i=1}^{n} f(r_i, \theta_i)\; r_i\; \Delta r_i\; \Delta\theta_i = \sum_{i=1}^{n} f(r_i, \theta_i)\; \Delta A_i$$

donde denotaremos por ΔA_i al término $r_i\ \Delta r_i\ \Delta\theta_i$

- El valor exacto volumen lo obtenemos pasando al límite

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(r_i, \theta_i)\; r_i\; \Delta r_i\; \Delta\theta_i = \iint_R f(r, \theta)\; r\; dr\; d\theta = \iint_R f(r, \theta) dA.$$

donde denotamos dA al término $r\ dr\ d\theta$.

Trabajaremos con regiones más generales distinguiendo dos tipos (ver Figura 2.17):

1. Las regiones $r-$simples: son aquéllas para las cuales la variable θ tiene como límites valores constantes, es decir, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Sin embargo, los límites para el radio r dependen del ángulo, es decir, $g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)$.
2. Las regiones $\theta-$simples: son aquéllas para las que el radio tiene límites constantes $R_1 \leq r \leq R_2$ y los límites para la variable angular dependen del radio, $h_1(r) \leq \theta \leq h_2(r)$.

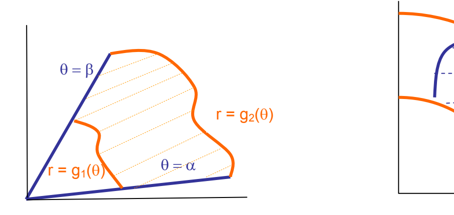


Figura 2.17: Región r-simple y región θ-simple.

En estos casos, las integrales se calculan también mediante integración reiterada:

1. Si $S = \{(r, \theta) \in D : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)\}$, donde g_1 y g_2 son continuas en $[\theta_1, \theta_2]$, entonces:

$$\iint_S f(r, \theta)\, dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

2. Si $S = \{(r, \theta) \in D : R_1 \leq r \leq R_2, h_1(r) \leq \theta \leq h_2(r)\}$, donde h_1 y h_2 son continuas en $[r_1, r_2]$, entonces:

$$\iint_S f(r, \theta)\, dA = \int_{R_1}^{R_2} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r, \theta)\, r\, d\theta\, dr.$$

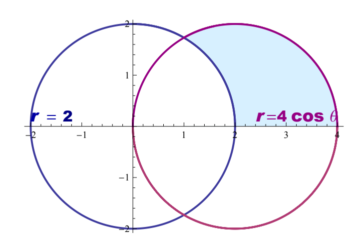
Ejemplo 2.15. Calculemos la integral $\iint_S \sin\theta\, dA$ donde S es la región del primer cuadrante situada en el interior de la circunferencia $r = 4\cos\theta$ y en el exterior de la circunferencia $r = 2$.

Solución. Para hallar los límites de integración angulares, calculamos la intersección de ambas curvas:

$$4\cos\theta = 2, \quad \text{por tanto:} \quad \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Entonces, la región S queda definida por:

$$S = \{(r, \theta) \,:\, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3},\ 2 \leq r \leq 4\cos\theta\}$$



Región polar S.

y tenemos que:

$$\iint_S \sin\theta \, dA = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_2^{4\cos\theta} \sin\theta \, r\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta \left[\frac{r^2}{2}\right]_2^{4\cos\theta} d\theta$$

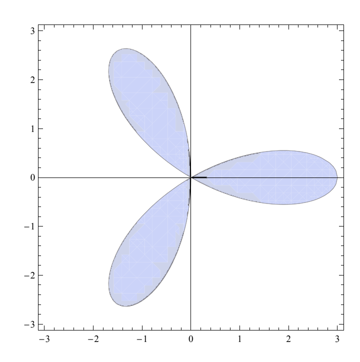
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\,(16\cos^2\theta - 4)\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} (4\cos^2\theta\,\sin\theta - \sin\theta)\, d\theta$$

$$= -\frac{8}{3}\left[\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + 2\left[\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4}{3}. \blacksquare$$

Ejemplo 2.16. Usando una integral doble, hallemos el área encerrada por la gráfica de $r = 3\cos 3\theta$.

Solución. Dibujando la curva dada en polares, vemos que se trata de una rosa de tres pétalos. Calculemos el área de la región P encerrada por uno de ellos:

$$P = \{(r,\theta) \,:\, -\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{6},\ 0 \le r \le 3\cos 3\theta\}.$$



Área encerrada por una rosa de tres pétalos.

P es una región $r-$simple, por tanto:

$$A(P) = \iint_P dA = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{3\cos 3\theta} r\, dr\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{3\cos 3\theta} dr\, d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{9\cos^2 3\theta}{2}\, d\theta = \frac{9}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 6\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{9}{4}\left[\theta + \frac{\sin 6\theta}{6}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{9}{4}(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) = \frac{3\pi}{4} \text{ u.a.}$$

y el área total buscada será:

$$A = 3A(P) = \frac{9\pi}{4} \text{ u.a. } \blacksquare$$

Ejercicio 2.6. Sea R la región anular situada entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 5$. Calcula la integral $\iint_R r \sin\theta dA$ considerando primero R como región $r-$simple y, luego, considerando R como región $\theta-$simple. (Solución: 0).

2.1.6. Cambios de variables en integrales dobles

Nuestro siguiente propósito es estudiar y aplicar el teorema del cambio de variables para poder evaluar integrales mediante cambios a otras coordenadas de modo que la integral resulte más sencilla de calcular.

Vamos a transformar una integral de la forma

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

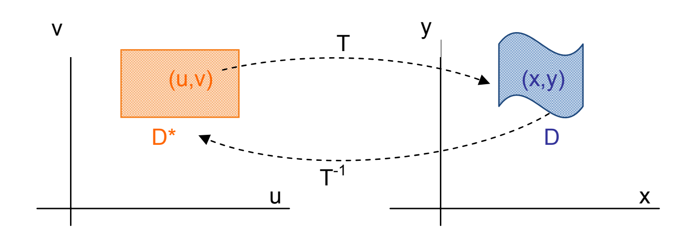
en otra integral de la forma

$$\iint_{D^*} F(u,v)\,du\,dv.$$

Debemos estudiar, por tanto, qué relación hay entre las regiones D y D^* y los integrandos. El cambio de coordenadas viene definido por dos funciones X e Y que relacionan las variables x, y con las variables u y v :

$$x = X(u,v), \quad y = Y(u,v)$$

y definen una aplicación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que aplica un conjunto D^* del plano uv a otro conjunto D del plano xy.



Cambio de variables.

Despejando de estas ecuaciones, si es posible, u y v obtenemos,

$$u = U(x,y), \quad v = V(x,y)$$

que definen la aplicación inversa de T y que transforma los puntos de D en los de D^*.

■ **Teorema 2.5.** (**Teorema del cambio de variables**).

Sean D y D^* regiones elementales del plano.

Sea $T : D^* \to \mathbb{R}^2$ una transformación de clase $\mathcal{C}^1$ que cumple:

$D = T(D^*)$;

T es biyectiva en D^*;

$J_T = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ en D^*.

Entonces, para cualquier función integrable $f : D \to \mathbb{R}$ se tiene:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv.$$

■ **Nota 2.2.** $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ representa al jacobiano de T :

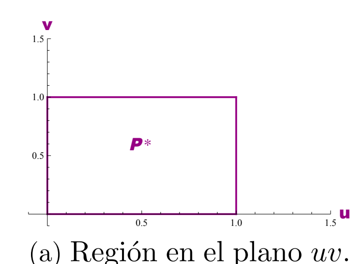
$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial X}{\partial v} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

■ **Propiedad 2.4.** Se verifica que:

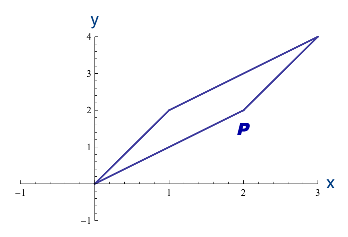
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}}.$$

El teorema sigue siendo válido aunque fallen las condiciones de inyectividad y del jacobiano en algún punto de la frontera de D^*.

⬢ **Ejemplo 2.17.** Sea P el paralelogramo acotado por las rectas: $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$, $y = x + 1$. Evaluemos $\iint_P x\, y\, dx\, dy$ haciendo el cambio de variables $x = u - v$, $y = 2u - v$, es decir, $T(u, v) = (u - v,\ 2u - v)$.



(a) Región en el plano uv.



(b) Región en el plano xy.

Región de integración en distintas coordenadas.

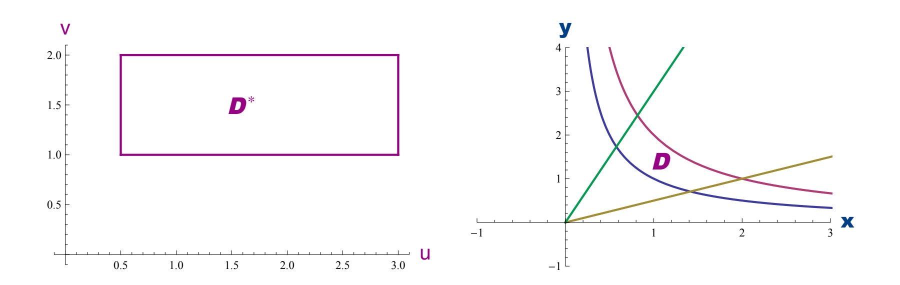
Solución. En este caso $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 1$ y $P^* = \{(u,v)\,/\,0 \leq u \leq 1,\, -2 \leq v \leq 0\}$, entonces:

$$\iint_P x\,y\,dx\,dy = \iint_{P^*} (u-v)\,(2u-v)\,1\,du\,dv = \int_{-2}^{0}\int_0^1 (2u^2 - 3uv + v^2)\,du\,dv$$

$$= \int_{-2}^{0} \left[\frac{2u^3}{3} - \frac{3u^2v}{2} + uv^2\right]_0^1 dv = \int_{-2}^{0} \left(\frac{2}{3} - \frac{3v}{2} + v^2\right) dv$$

$$= \left[\frac{2v}{3} - \frac{3v^2}{4} + \frac{v^3}{3}\right]_{-2}^{0} = 7. \blacksquare$$

⬢ **Ejemplo 2.18.** Calculemos $\iint_D x^2y^2dxdy$ sobre la región D del primer cuadrante limitada por las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 2$ y las rectas $y = x/2$ e $y = 3x$.



Región de integración en distintas coordenadas.

Solución. En este caso, consideraremos el cambio de variables definido por:

$$u = x\,y$$
$$v = \frac{y}{x}$$

que nos transforma la región de integración en la región

$$D^* = \{(u,v)\ :\ 1 \leq u \leq 2,\ \ \frac{1}{2} \leq v \leq 3\}.$$

Si no queremos despejar x e y en función de u y v, podemos calcular $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ mediante la propiedad vista anteriormente, así:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x}\end{pmatrix}} = \frac{1}{2\dfrac{y}{x}} = \frac{1}{2v}.$$

El Jacobiano no se anula en D^*; entonces:

$$\iint_D x^2y^2dxdy = \iint_{D^*} u^2\frac{1}{2v}\,du\,dv = \int_{\frac{1}{2}}^{3}\frac{1}{2v}\int_1^2 u^2\,du\,dv = \int_{\frac{1}{2}}^{3}\frac{1}{2v}\left[\frac{u^3}{3}\right]_1^2 dv$$

$$= \frac{7}{6}(\ln 3 - \ln\frac{1}{2}) = \frac{7}{6}\ln 6. \blacksquare$$

⬢ **Ejercicio 2.7.** Calcula $\iint_S xydxdy$ siendo S la región del primer cuadrante delimitada por las curvas $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$, $x^2-y^2=1$ y $x^2-y^2=4$. (Solución: $\frac{15}{8}$).

Cambio a coordenadas polares.

La trasformación de coordenadas cartesianas a coordenadas polares viene dada por:

$$x = r\,\cos\theta$$
$$y = r\,\sin\theta$$

Los sectores circulares en el sistema de coordenadas cartesianas se transforman en rectángulos en el sistema de coordenadas polares (ver Figura 2.18).

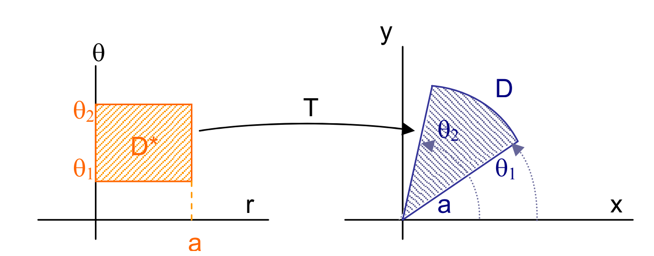


Figura 2.18: Regiones en el cambio de variables a polares.

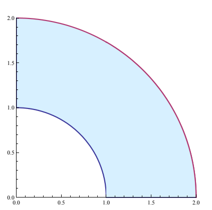
En este caso, el jacobiano de la transformación es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix} = \left(r\cos^2\theta + r\sin^2\theta\right) = r$$

y aplicando el teorema del cambio de variables se obtiene la expresión ya obtenida para la integración en coordenadas polares:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

⬢ **Ejemplo 2.19.** Calculemos $\iint_D \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$ donde D es la región del primer cuadrante situada entre los arcos de las circunferencias $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$ y los ejes coordenados.

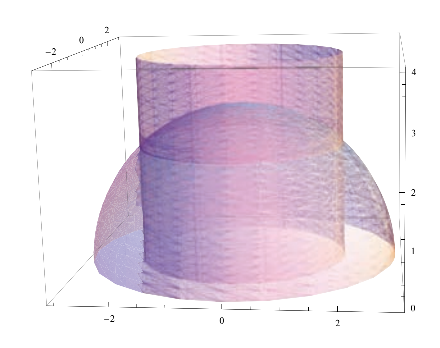


Región anular.

Solución. Mediante un cambio a coordenadas polares, la región D se transforma, en el plano (r, θ), en la región rectangular $[1, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$; por tanto,

$$\iint_D \ln(x^2 + y^2)\, dx\, dy = \iint_{D^*} \ln(r^2)\, r\, dr\, d\theta = \int_1^2 2r \ln r \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, dr$$
$$= \pi \int_1^2 r \ln r\, dr = \pi \left[\frac{r^2 \ln r}{2} - \frac{r^2}{4} \right]_1^2$$
$$= \pi \left(2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{4} \right) = (2 \ln 2 - \frac{3}{4})\pi. \ \blacksquare$$

⬣ **Ejemplo 2.20.** Hallemos el volumen de la región sólida limitada superiormente por el hemisferio $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ e inferiormente por la región circular R dada por $x^2 + y^2 = 4$.



Región sólida entre cilindro y esfera.

Solución.

$$V = \iint_R \sqrt{9 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

Esta integral se resuelve fácilmente pasando a coordenadas polares. En dichas coordenadas, la región R se transforma en la región R^* dada por $[0, 2] \times$

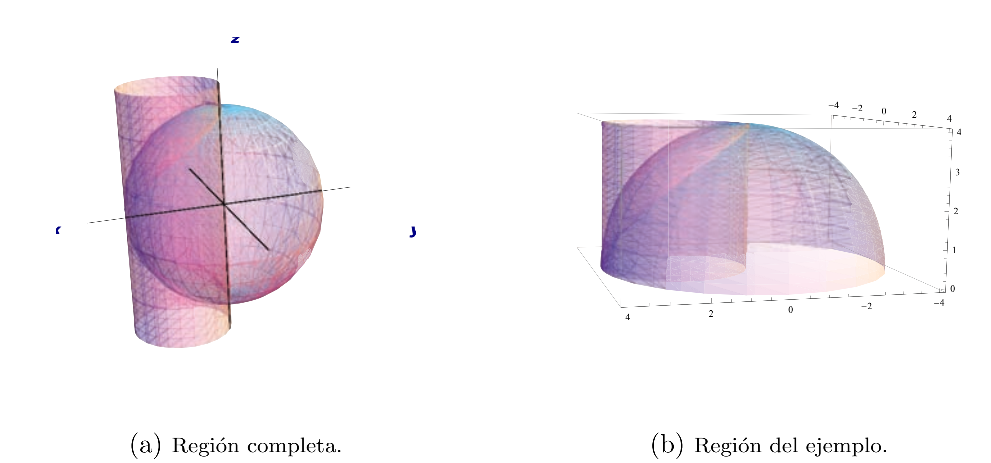
$[0, 2\pi]$, por tanto:

$$V = \iint_{R^*} \sqrt{9-r^2}\, r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r\sqrt{9-r^2} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-(9-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-5\sqrt{5}}{3} + 9 \right) d\theta = \left(\frac{27-5\sqrt{5}}{3} \right) 2\pi \text{ u.v.} \blacksquare$$

Ejemplo 2.21. Calculemos el volumen del sólido que queda dentro de la semiesfera $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

Solución. La región sólida entre la semiesfera y el cilindro aparece en la Figura 2.19. Su volumen es:



(a) Región completa. (b) Región del ejemplo.

Figura 2.19: Región sólida entre cilindro y semiesfera.

$$V = \iint_D \sqrt{16 - x^2 - y^2}\, dx\, dy.$$

Esta integral la resolvemos haciendo el cambio a coordenadas polares. La región D sobre la que integramos (ver Figura 2.20) es el interior de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x = 0$ definida por el cilindro y la expresamos mediante coordenadas polares como:

$$D = \left\{ (r, \theta) \ : \ 0 \leq r \leq 4 \sin\theta, \ \ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

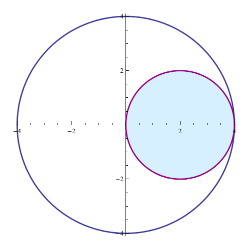


Figura 2.20: Región de integración D.

Luego el volumen es:

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\sin\theta} \sqrt{16-r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{3}\left(16-r^2\right)^{3/2} \right]_0^{4\sin\theta} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{64}{3}\cos^3\theta + \frac{64}{3} \right) d\theta = \left[\frac{64}{3}\theta - \frac{64}{3}\sin\theta + \frac{64}{9}\sin^3\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{64}{3}\pi - \frac{256}{9} \text{ u.v.} \blacksquare$$

Ejercicio 2.8. Sea R la región anular situada entre las dos circunferencias $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=9$, en el primer cuadrante. Calcula $\iint_R (x^2+y)dA$. (Solución: $5\pi + \frac{26}{3}\pi$).

Ejercicio 2.9. Calcula el volumen de la región sólida encerrada por la intersección de las superficies

$$x^2+y^2+(z-3)^2 = 9 \qquad \text{y} \qquad z = x^2+y^2.$$

(Solución: $\dfrac{15+20\sqrt{5}}{6}$).

Coordenadas polares generalizadas

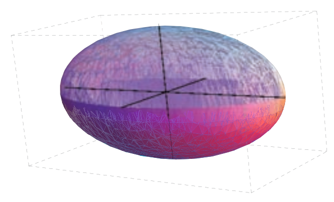
La transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas polares generalizadas viene dada por:

$$x = a\, r\cos\theta$$
$$y = b\, r\sin\theta.$$

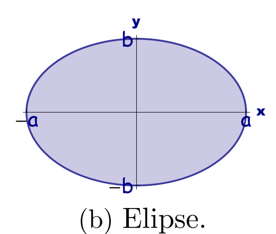
En este caso, el jacobiano de la transformación es $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = a\, b\, r$. Aplicando el teorema del cambio de variables se obtiene:

$$\iint_R f(x,y)\, dx\, dy = a\, b \iint_{R^*} f(a\, r\, \cos\theta, b\, r\, \sin\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

Ejemplo 2.22. Hallemos la integral de la función $f(x,y) = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ sobre la región R limitada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.



(a) Elipsoide.



(b) Elipse.

Gráfica de f y región de integración.

Solución. La curva dada por la elipse corresponde, en estas coordenadas generalizadas, a $r = 1$. La región R limitada por la elipse corresponde a la región $[0,1] \times [0,2\pi]$, por tanto:

$$\iint_R \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy = ab \iint_{R^*} r\sqrt{1-r^2} drd\theta = ab \int_0^1 r\sqrt{1-r^2} \int_0^{2\pi} d\theta dr$$
$$= 2\pi ab \int_0^1 r\sqrt{1-r^2} dr = -2\pi ab \left[\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^1$$
$$= \frac{2\pi ab}{3}. \blacksquare$$

Ejemplo 2.23. Calculemos $\iint_D x\, y\, dx\, dy$ siendo D la región limitada por la elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{18} = 2$.

Solución. La ecuación de la elipse la podemos expresar de la forma:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Procediendo de forma análoga al ejemplo anterior tenemos que la región sobre la que integramos es $R = [0,1] \times [0,2\pi]$ y teniendo en cuenta que $x = 2\, r\, \cos\theta$, $y = 6\, r\, \cos\theta$ y que $2 \times 6\, r$ es el jacobiano de la transformación, tenemos:

$$\iint_R x\, y\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r\, \cos\theta\, 6r\, \sin\theta\, 2 \times 6\, r d\theta\, dr$$

$$= 144 \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \cos\theta \sin\theta\, d\theta\, dr = 144 \int_0^1 r^3 \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} dr = 144 \int_0^1 r^3 \times 0 = 0. \blacksquare$$

Ejercicio 2.10. Comprueba que el jacobiano de la transformación de coordenadas cartesianas a polares generalizadas es $\pi\, a\, b$.

2.1.7. Aplicaciones de la integral doble

1. Volúmenes de cuerpos en el espacio.

Hemos visto que si $z = f(x,y)$ es una función continua y no negativa, la integral doble

$$\iint_D f(x,y) dxdy$$

nos da el volumen bajo la superficie de la gráfica de dicha función sobre la región $D \subset \mathbb{R}^2$.

Si $g(x,y)$ es otra función tal que $g(x,y) \leq f(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$, entonces la integral

$$\int \int_D (f(x,y) - g(x,y)) dxdy$$

nos da el volumen atrapado entre las dos superficies $z = f(x, y)$ y $z = g(x, y)$ sobre la región D (ver Figura 2.21).

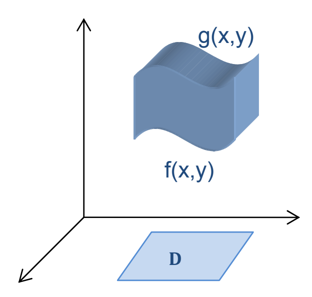
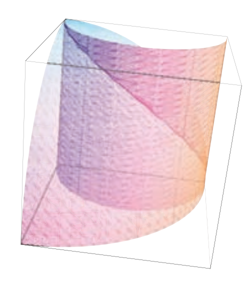


Figura 2.21: Volumen entre dos funciones.

Ejemplo 2.24. Calculemos el volumen del recinto interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ y al cilindro $x^2 + (y - a)^2 = a^2$, en el primer octante.

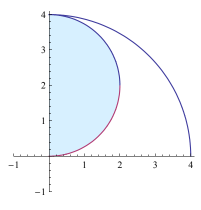


Volumen entre cilindro y esfera.

Solución. Dibujando la esfera y el cilindro, vemos que el volumen en el primer octante viene dado por la integral

$$V = \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

siendo D, en el plano XY, el semicírculo de radio a con centro en $(0, 1)$.



Región de integración D.

La integral se resuelve de modo más sencillo pasando a coordenadas polares, en cuyo caso, la curva que limita a la región D se puede expresar de la forma

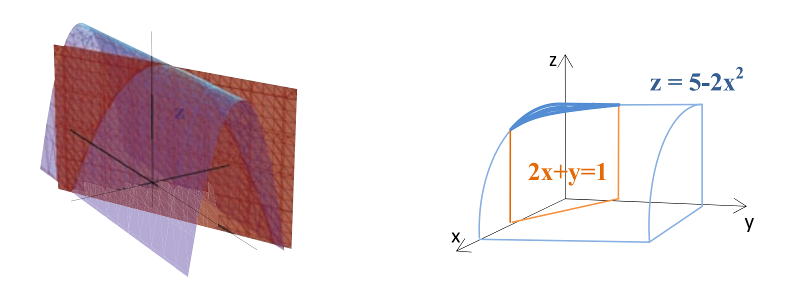
$r = 2a \sin\theta$, por tanto:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\sin\theta} \sqrt{4a^2 - r^2}\, r\, dr\, d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{(4a^2 - r^2)^{3/2}}{3} \right]_0^{2a\sin\theta} d\theta$$

$$= \frac{8a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^3\theta)\, d\theta = \frac{8a^3}{3} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta (1 - \sin^2\theta)\, d\theta \right)$$

$$= \frac{8a^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{4a^3(3\pi - 4)}{9} \text{ u.v.} \ \blacksquare$$

Ejemplo 2.25. Calculemos el volumen del cuerpo limitado por el cilindro (superficie que se extiende infinitamente de modo paralelo a un eje dado) $z = 5 - 2x^2$ cilindro parabólico), los planos coordenados y el plano $2x + y = 1$.



Volumen entre cilindro y planos.

Solución. Dibujando el cilindro y los planos, observamos que se trata de calcular el volumen bajo la superficie $z = f(x, y) = 5 - 2x^2$ sobre la región R limitada por el triángulo formado por los ejes X e Y y la recta $2x + y = 1$ (en el plano XY). Por tanto:

$$V = \iint_R f\, dA = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{1-2x} (5 - 2x^2) dy dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (5 - 2x^2)(1 - 2x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (4x^3 - 2x^2 - 10x + 5) dx = \left[x^4 - \frac{2x^3}{3} - 5x^2 + 5x \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{59}{48} \text{ u.v} \ \blacksquare$$

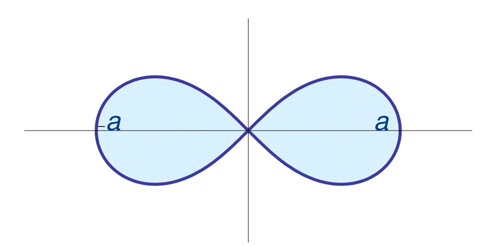
Ejercicio 2.11. Halla el volumen del cuerpo comprendido entre la semiesfera $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. (Solución: $\frac{4\pi}{3}(\sqrt{2} - 1)$ u.v.).

2. Áreas de figuras planas.

Integrando la función $z = f(x, y) = 1$ sobre la región D del plano xy, la integral da lugar al volumen del sólido cuya base es D y cuya altura es 1; puesto que este volumen es el área de la base por la altura, que es 1, el valor numérico que se obtiene no es más que el área de la región plana D. Es decir,

$$\iint_D dxdy = \text{área de } D.$$

Ejemplo 2.26. Hallemos el área encerrada por la lemniscata de Bernoulli $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.



Área encerrada por la lemniscata.

Solución. Consideremos la ecuación de la lemniscata en coordenadas polares: $r = a\sqrt{2\cos 2\theta}$. Teniendo en cuenta la simetría que presenta esta curva respecto del eje polar y respecto del eje $\theta = \frac{\pi}{2}$, calcularemos el área encerrada por esta curva en el primer cuadrante y multiplicaremos por 4:

$$A = \iint_D dx\,dy = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2}{2} 2\cos 2\theta\; d\theta = 4\frac{a^2}{2}\left[\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2 \text{ u.a. } \blacksquare$$

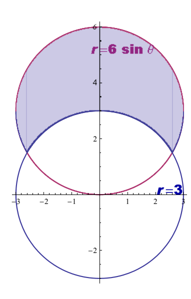
3. Cálculo de masas y centros de masa para el caso de placas bidimensionales.

Supongamos que la placa ocupa una región D del plano XY, entonces las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa vienen dadas por:

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\,\rho(x, y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x, y)\,dx\,dy} \qquad \text{y} \qquad \bar{y} = \frac{\iint_D y\,\rho(x, y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x, y)\,dx\,dy}$$

donde $\int\int_D \rho(x, y)dxdy$ representa la *masa total* del cuerpo, siendo $\rho(x, y)$ la densidad de masa en el punto (x, y) si consideramos una placa no homogénea.

Ejemplo 2.27. Calculemos la masa de una lámina plana que cubre la región fuera de la circunferencia $r = 3$, en coordenadas polares, y dentro de la circunferencia $r = 6\sin\theta$, siendo la densidad en cada punto $\rho(r) = \dfrac{1}{r}$.



Región ocupada por la lámina plana.

Solución.

$$M = \iint_R \rho(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R^*} \rho(r)\,r\,dr\,d\theta = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_3^{6\sin\theta} dr\,d\theta$$

donde los límites angulares φ_1 y φ_2 se obtienen de la intersección de ambas curvas:

$$3 = 6\sin\theta \to \sin\theta = \frac{1}{2} \to \theta = \frac{\pi}{6};\; \theta = \pi - \frac{\pi}{6}$$

por tanto,

$$M = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi-\frac{\pi}{6}} [r]_3^{6\sin\theta}\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi-\frac{\pi}{6}} (6\sin\theta - 3)d\theta = [-6\cos\theta - 3\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\pi-\frac{\pi}{6}}$$
$$= -6\cos(\pi - \frac{\pi}{6}) - 3(\pi - \frac{\pi}{6}) + 6\cos\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = 6\sqrt{3} - 2\pi \text{ u.m.} \blacksquare$$

Ejemplo 2.28. Calculemos el centro de masa de un cuerpo homogéneo en forma de semicírculo de radio r_0.

Solución. Podemos colocar el cuerpo ocupando la región del plano:

$$R = \{(x,y) : -r_0 \le x \le r_0,\; 0 \le y \le \sqrt{r_0^2 - x^2}\}.$$

El área del cuerpo es $\frac{\pi r_0^2}{2}$. Por ser el cuerpo homogéneo, la densidad en cada punto es la misma, es decir, $\rho(x,y) = \rho_0$. Sean $(\bar{x},\bar{y})$ las coordenadas del centro de masa, entonces:

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\,\rho_0\,dx\,dy}{\iint_R \rho_0\,dx\,dy} = \frac{\iint_R x\,dx\,dy}{\iint_R dx\,dy} = \frac{\iint_R x\,dx\,dy}{A(R)} = \frac{2}{\pi r_0^2}\iint_R x\,dx\,dy$$

$$= \frac{2}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{\pi} r\,\cos\theta\,r\,dr\,d\theta = \frac{2}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0} r^2\,[\sin\theta]_0^{\pi}\,d\theta = 0,$$

conclusión que hubiésemos podido obtener ya que, debido a la simetría de R respecto del eje Y y tratarse de un cuerpo homogéneo, el centro de masa se

halla situado sobre el eje Y.

$$\bar{y} = \frac{\iint_R y\,\rho\,dx\,dy}{\iint_R \rho\,dx\,dy} = \frac{\iint_R y\,dx\,dy}{\iint_R dx\,dy} = \frac{\iint_R y\,dx\,dy}{A(R)} = \frac{2}{\pi r_0^2}\iint_R y\,dx\,dy$$

$$= \frac{2}{\pi r_0^2}\int_0^{\pi}\int_0^{r_0} r\,\sin\theta\,r\,dr\,d\theta = \frac{2}{\pi r_o^2}\int_0^{\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{r_0}\sin\theta\,d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi r_0^2}\frac{r_0^3}{3}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta = \frac{2r_0}{3\pi}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = \frac{2r_0}{3\pi}(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{4r_0}{3\pi}.$$

Por tanto el centro de masa se halla en el punto $(0, \dfrac{4r_0}{3\pi})$. ■

4. Momentos de inercia de figuras planas.

Éste es un concepto importante en Mecánica que mide la respuesta de un cuerpo frente a un giro. En el caso de un cuerpo plano de densidad $\rho(x,y)$ ocupando una región D, los momentos de inercia respecto al eje X y al eje Y, respectivamente, son:

$$I_x = \iint_D y^2\,\rho(x,y)\,dx\,dy, \quad I_y = \iint_D x^2\,\rho(x,y)\,dx\,dy.$$

⬢ **Ejemplo 2.29.** Dado un cuerpo homogéneo de densidad ρ_0 y de forma cuadrada de lado a, calculemos su momento de inercia respecto de un eje que pasa por uno de sus lados.

Solución. Podemos colocar el cuerpo ocupando la región

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a\}$$

y calcular el momento de inercia respecto del eje X.

$$I_x = \iint_D y^2\,\rho(x,y)\,dx\,dy = \iint_D y^2\,\rho_0\,dx\,dy = \rho_0\int_0^a\int_0^a y^2\,dx\,dy$$
$$= \rho_0\int_0^a\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^a dx = \rho_0\frac{a^3}{3}\left[x\right]_0^a = \frac{\rho_0\,a^4}{3}. \ ■$$

5. Volúmenes de sólidos de rotación: el teorema de Pappus-Guldin.

Sea R una región del plano y L una recta en dicho plano que no corta al interior de R. Si r es la distancia del centroide de R a la recta L, el volumen del sólido de revolución generado al girar R en torno a la recta L es:

$$V = 2\pi\,r\,A,$$

siendo A el área de R (ver Figura 2.22).

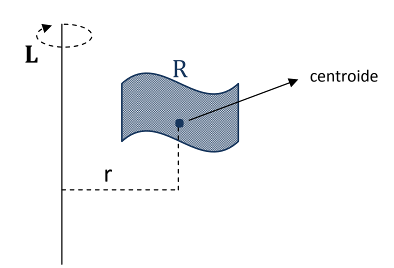


Figura 2.22: Interpretación geométrica del Teorema de Pappus-Guldin.

Ejemplo 2.30. Calculemos el volumen de un toro sólido.

Solución. Podemos generar un toro sólido haciendo girar una región circular R de radio r_0, con centro en el punto $(d, 0)$, alrededor del eje Y (ver Figura 2.23).

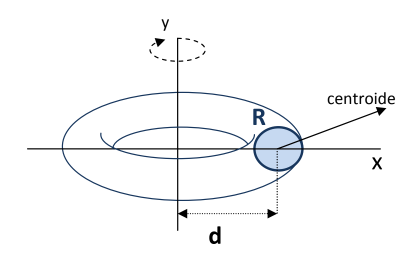


Figura 2.23: Toro sólido.

El centroide de la región R está a una distancia d $(d > r_0)$ del eje de rotación, por tanto:

$$V = 2\pi\, d\, A(R) = 2\pi\, d\, \pi r_0^2 = 2\pi^2\, d\, r_0^2 \text{ u.v.} \blacksquare$$

2.1.8. Ejercicios de la sección 2.1

1. Calcula las integrales siguientes:

   a) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}(x^4 y + y^2)\, dy\, dx$

   b) $\iint_R |y| \cos\dfrac{\pi x}{4} dx\, dy$ siendo $R = [0, 2] \times [-1, 1]$.

   c) $\int_0^1 \int_0^1 \ln\left((x+1)(y+1)\right) dx\, dy$

   (Solución: a) $\frac{13}{15}$, b) $\frac{4}{\pi}$, c) $\ln 16 - 2$).

2. Calcula la siguiente integral iterada

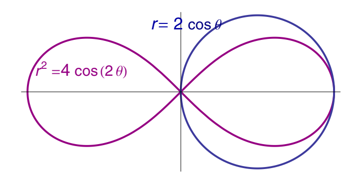
$$\iint_R \frac{\sin y}{y-1}\, dx\, dy$$

   siendo R la región del plano limitada por el eje X, la recta $y = x + 1$ y la recta $x = 0$. (Solución: $\cos 1 - 1$).

3. Calcula el volumen de la porción del cilindro $x^2 + y^2 = b^2$ que queda comprendida entre los planos $y + z = a^2$ y $z = 0$, con $a^2 \geq b > 0$. (Solución: $a^2 b^2 \pi$ u.v.).

4. Calcula $\iint_S x\ y\ dx\ dy$, siendo S la región del primer cuadrante delimitada por las curvas $x^2+y^2 = 4$, $x^2+y^2 = 9$, $x^2-y^2 = 1$, $x^2-y^2 = 4$. (Solución: 15/8)

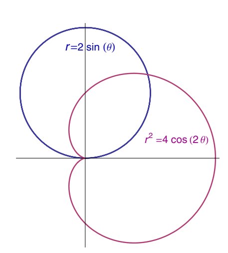
5. Calcula $\iint_R \sin\theta\, dA$ donde R es la región del primer cuadrante situada entre circunferencia $r = 2\cos\theta$ y la lemniscata $r^2 = 4\cos 2\theta$. (Solución: 0.390524).



Circunferencia y lemniscata

6. Calcula la masa de una placa cuya densidad en cada punto viene dada por la función $\delta(x, y) = e^{-x^2-y^2}$, la forma de la placa es la región acotada por el semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ y el eje Y. (Solución: $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e^4})\pi$ u.m.).

7. Calcula el área comprendida entre la circunferencia $r = 2\sin\theta$ y la cardiode $r = 1 + \cos\theta$. (Solución: 1.18802 u.a.).



Cardiode y circunferencia

8. Calcula el volumen del elipsoide $x^2+2y^2+5z^2 = 10$. (Solución: $\frac{40}{3}\pi$ u.v.).

9. Calcula el volumen del sólido comprendido entre las superficies dadas por $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. (Solución: $\frac{16}{3}\pi$ u.v.).

10. Calcula la masa de una lámina cuya forma está determinada por la región del primer cuadrante acotada por $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $y = 1 + x^2$ y $y = x^2$ siendo la densidad en cada punto de la lámina $\rho(x, y) = 2x(2y+1)$. (Solución: 3 u.m.).

11. Calcula el centro de masas y el momento de inercia con respecto al eje X de una placa bidimensional acotada por las curvas $y^2 = x$ y $x = 2y - y^2$

y si la densidad en cada punto es $\delta(x, y) = 2y + 1$. (Solución: $c.m. = (11/20, 11/20)$, $I_x = 7/30$).

12. Calcula el volumen del sólido de rotación obtenido al girar alrededor del eje Y el cuadrado de lado a. (Solución: πa^3 u.v.).

2.2. LA INTEGRAL TRIPLE

2.2.1. La integral triple como límite de sumas de Riemann

Una vez ampliado el concepto de la integral de Riemann a integrales dobles, es inmediata la generalización a 3 o más variables. Para el caso de las integrales triples, vamos a considerar:

- Un paralelepípedo $B = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$ es un intervalo de $\mathbb{R}^3$.
- Una función real f definida y acotada sobre una región B.
- Una partición regular $P = P_1 \times P_2 \times P_3$ partición de B que nos proporciona subintervalos B_{ijk} de B (ver Figura 2.24).
- Un punto cualquiera $\vec{c}_{ijk} = (x_i, y_j, z_k)$ del subintervalo B_{ijk}.

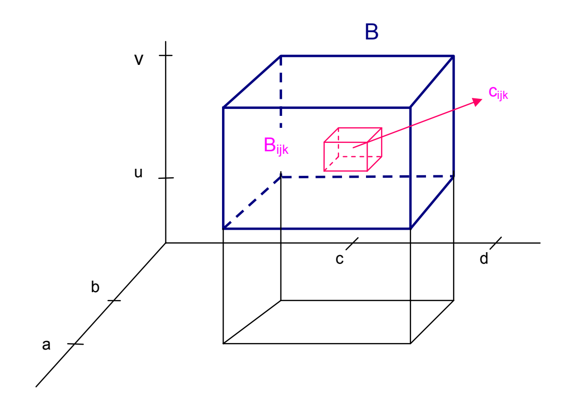


Figura 2.24: Partición del intervalo B.

Definimos la integral de una función f sobre la región B como un límite de sumas tal como hicimos para una función de dos variables. Para ello, tomamos la partición $P = P_1 \times P_2 \times P_3$ del intervalo B, con P_i dividiendo cada lado de B en n partes iguales y formamos la suma:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(\vec{c}_{ijk})\, \Delta V$$

donde $\vec{c}_{ijk} \in B_{ijk}$, siendo B_{ijk} el ijk-ésimo paralelepípedo en la partición de B y ΔV es el volumen de B_{ijk}, $\Delta V = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$. Entonces:

■ **Definición 2.6.** Sea $f : B \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función acotada en B. Si existe $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$, para cualquier selección de $\vec{c}_{ijk}$, entonces f es **integrable** en B y a ese límite se le llama **integral triple** de f sobre B:

$$\int_B f dV = \iiint_B f dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j,k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Como ocurre en el caso de dos variables, las funciones continuas definidas en B son integrables, así como las funciones cuyas discontinuidades están formadas por unión de gráficas de funciones continuas (conjuntos de contenido nulo).

2.2.2. Cálculo de integrales triples

Para calcular integrales triples podemos considerar las integrales iteradas y aplicar el teorema de Fubini, que nos permite hallar la integral triple sobre un rectángulo de $\mathbb{R}^3$ de la forma $[a, b] \times [c, d] \times [u, v]$, mediante integrales iteradas:

$$\int_u^v \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \quad \int_u^v \int_a^b \int_c^d f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz, \ldots$$

Cambiando los límites de integración podemos calcular hasta 6 combinaciones de integrales iteradas.

⬢ **Ejemplo 2.31.** Calculemos $\iiint_R (x\,y + z\,x + y\,z)\, dV$ donde

$$R = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 3, \quad 0 \leq z \leq 2\right\}.$$

Solución. Calculamos la integral dada mediante integrales iteradas aplicando el teorema de Fubini:

$$\iiint_R (x\,y + z\,x + y\,z)\, dV = \int_0^1 \int_0^3 \int_0^2 (x\,y + z\,x + y\,z)\, dz\, dy\, dx.$$

En primer lugar calculamos la integral respecto de z,

$$\int_0^2 (x\,y + z\,x + y\,z)\, dz = \left[x\,y\,z + x\frac{z^2}{2} + y\frac{z^2}{2}\right]_0^2 = 2x + 2y + 2x\,y,$$

luego

$$\int_0^1 \int_0^3 \int_0^2 (x\,y + z\,x + y\,z)\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^3 (2x + 2y + 2xy)\, dy\, dx.$$

Calculamos ahora la integral respecto de y, es decir,

$$\int_0^3 (2x + 2y + 2xy)\, dy = \left[2x\,y + y^2 + x\,y^2\right]_0^3 = 9 + 15x,$$

por tanto

$$\int_0^1 \int_0^3 (2x + 2y + 2xy)\, dy\, dx = \int_0^1 (9 + 15x) dx = \left[9x + \frac{15x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{33}{2}. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 2.32. Calculemos la siguiente integral triple:

$$\iiint_R x\sqrt{1+4z^2}z\,y^4\,dx\,dy\,dz,$$

siendo $R = [-1,2]\times[0,2]\times[0,3]$.

Solución. Aplicamos el teorema de Fubini:

$$\iiint_R x\sqrt{1+4z^2}z\,y^4\,dx\,dy\,dz = \int_0^3\int_0^2\int_{-1}^2 x\sqrt{1+4z^2}z\,y^4\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^3 \sqrt{1+4z^2}z \int_0^2 y^4 \int_{-1}^2 x\,dx\,dy\,dz = \int_0^3 z\sqrt{1+4z^2}\int_0^2 y^4\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2 dy\,dz$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^3 \sqrt{1+4z^2}z\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^2 dz = \frac{48}{5}\left[\frac{1}{12}(1+4z^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = -\frac{4}{5}+\frac{148\sqrt{37}}{5}.\blacksquare$$

Ejercicio 2.12. Plantea otro orden de integración para la integral del ejemplo anterior y comprueba que el resultado es el mismo. Explica por qué obtenemos la misma solución para todos los órdenes de integración posibles.

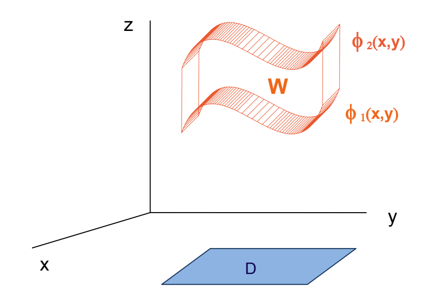
De nuevo, consideramos el problema de evaluar integrales sobre conjuntos acotados más generales $W\subset\mathbb{R}^3$. Éstos son, en general, subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ limitados por gráficas de funciones de dos variables. Distinguimos regiones de tipo I, de tipo II y de tipo III según proyectemos en cada uno de los planos coordenados.

Definición 2.7. Una región $W\subset\mathbb{R}^3$ es de **tipo I** si está limitada por "arriba" y por "debajo" por dos superficies, gráficas de funciones continuas ϕ_1 y ϕ_2, cuya proyección sobre el plano XY es una región D de tipo 1 ó 2, es decir, W queda definida por:

$$W = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; (x,y)\in D,\ \phi_1(x,y)\le z\le\phi_2(x,y)\},$$

donde ϕ_1, $\phi_2 : D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ son funciones continuas.

Si ocurre $\phi_1(x,y) = \phi_2(x,y)$ entonces (x,y) está en la frontera de D, es decir, $(x,y)\in\partial D$.



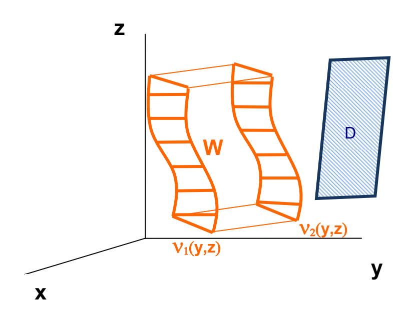
Región de tipo I.

■ **Definición 2.8.** Una región es de **tipo II** si está limitada "detrás" y "delante" por dos superficies, gráficas de funciones continuas υ_1 y υ_2, cuya proyección sobre el plano YZ es una región D del plano de tipo 1 ó 2. Este tipo de regiones están definidas por:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D,\ \upsilon_1(y, z) \leq x \leq \upsilon_2(y, z)\},$$

donde υ_1 , $\upsilon_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones continuas.

Si ocurre que $\upsilon_1(y, z) = \upsilon_2(y, z)$ entonces $(y, z) \in \partial D$.



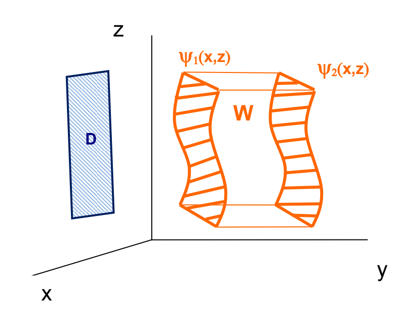
Región de tipo II.

■ **Definición 2.9.** Una región es de **tipo III** si está limitada a "izquierda" y "derecha" por dos superficies, gráficas de funciones continuas ψ_1 y ψ_2, cuya proyección sobre el plano XZ es una región D del plano de tipo 1 ó 2. Este tipo de regiones están definidas por:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in D,\ \psi_1(x, z) \leq y \leq \psi_2(x, z)\},$$

donde ψ_1, $\psi_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones continuas.

Si ocurre que $\psi_1(x, z) = \psi_2(x, z)$ entonces $(x, z) \in \partial D$.



Región de tipo III.

Veamos cómo integrar sobre este tipo de regiones.

Consideremos que queremos integrar sobre una región W de tipo I. Como se deduce de la definición, este tipo de regiones están acotadas, por tanto

podemos considerar un intervalo B de $\mathbb{R}^3$, es decir, una caja que contenga a W (ver Figura 2.25) Definimos en B la función f^* como sigue:

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{si } (x, y, z) \in W, \\ 0 & \text{si } (x, y, z) \in B - W. \end{cases}$$

Si f es continua en W, entonces f^* es integrable en B (a lo sumo, el conjunto de sus discontinuidades es ∂W, que está formado por gráficas de funciones continuas). Por tanto, podemos definir la integral triple sobre W del siguiente modo:

$$\iiint_W f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_B f^*(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

y además esta integral se calcula como:

$$\iiint_W f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left[\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dx\, dy.$$

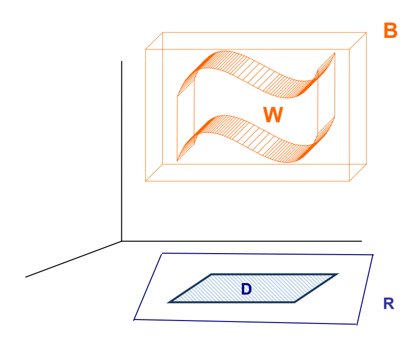


Figura 2.25: Dominio de definición de la función f^*en B.

La integral entre corchetes, una vez integrada, es una función $\xi(x, y)$ que depende de x y de y. Entonces:

$$\iiint_W f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_D \xi(x, y)\, dx\, dy,$$

es decir, se convierte en una integral doble de la función $\xi(x, y)$ sobre la región elemental D del plano XY. Observemos que D es la proyección de W sobre el plano XY.

Análogamente, si la región de integración W es de tipo II, la integral se calcula del siguiente modo:

$$\iiint_W f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left[\int_{\upsilon_1(y,z)}^{\upsilon_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx \right] dy\, dz,$$

siendo D en este caso, la proyección de W sobre el plano YZ.

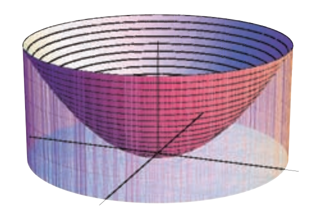
Si la región de integración W es de tipo III la integral se calcula del siguiente modo:

$$\iiint_W f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left[\int_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy \right] dx\, dz,$$

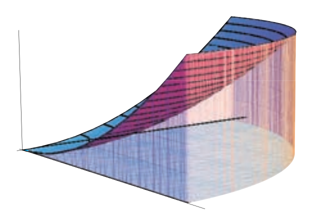
siendo D la proyección de W sobre el plano XY.

Puede ocurrir que una región de integración sea de varios tipos a la vez. Por ejemplo, una bola de radio R es de los tres tipos a la vez. En ese caso, podremos elegir el orden de integración según el tipo que estemos considerando.

Ejemplo 2.33. Calculemos la integral $I = \int\int\int_W x\ dx\,dy\,dz$, siendo W la región acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.



(a) Paraboloide completo.



(b) Paraboloide en el 1er octante.

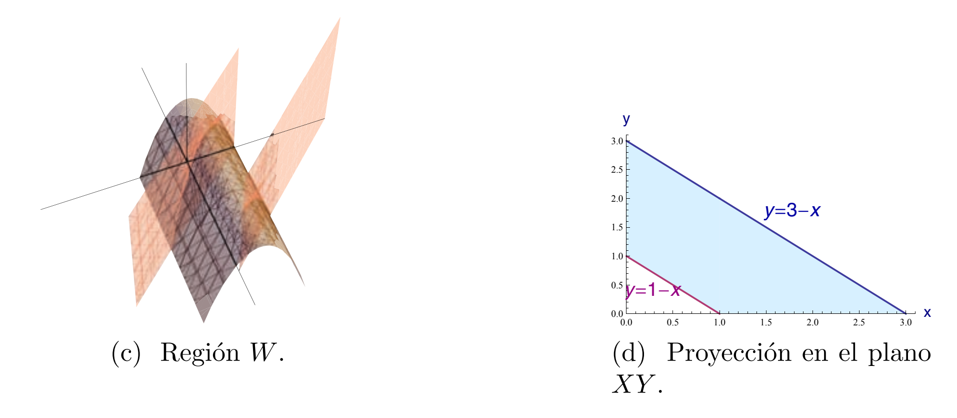
Región W.

Solución. La región W es una región de tipo I acotada superiormente por el plano $z = 2$ e inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y su proyección D sobre el plano XY es la cuarta parte, situada en el primer cuadrante, del círculo de radio $\sqrt{2}$ y centro en $(0, 0)$. Por tanto,

$$I = \int\int\int_W x\ dx\,dy\,dz = \iint_D \left[\int_{x^2+y^2}^{2} x\,dz\right] dx\,dy = \iint_D x(2 - x^2 - y^2)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}} r\cos\theta(2 - r^2)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2r^2 - r^4)\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \left[\frac{2r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2}} d\theta = \frac{8\sqrt{2}}{15} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta = \frac{8\sqrt{2}}{15} [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{15}. \blacksquare$$

Ejercicio 2.13. Resuelve la integral del ejemplo anterior considerando W como una región de tipo II .

Ejemplo 2.34. Calculemos el volumen de la región W del primer octante limitada superiormente por el cilindro $z = 1 - y^2$ situada entre los planos verticales $x + y = 1$ y $x + y = 3$.

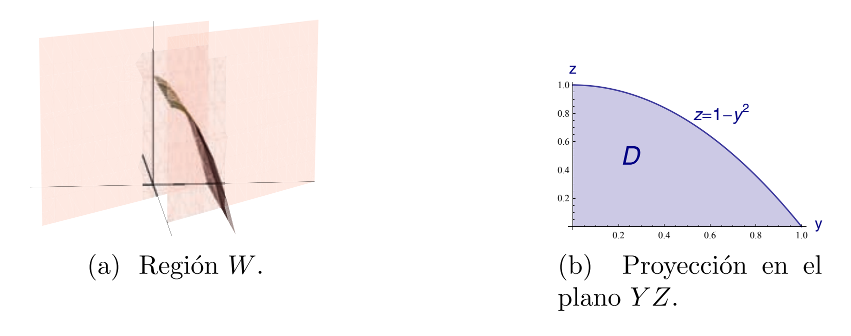


(c) Región W.

(d) Proyección en el plano XY.

Figura 2.26: Región W como tipo I.

Solución. Si consideramos la región W tipo I está limitada superiormente por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ y los planos $x + y = 1$ y $x + y = 3$ determinan la región D del plano XY (ver figura 2.26). En este caso, para integrar debemos descomponer la región D en dos partes y esto supone hacer dos integrales; simplificamos los cálculos si la consideramos como una región tipo II, (ver Figura 2.27) es decir proyectando sobre el plano YZ, los límites inferior y superior para x quedan determinados por los planos $x + y = 1$ y $x + y = 3$.



(a) Región W.

(b) Proyección en el plano YZ.

Figura 2.27: Región W como tipo II.

$$W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad (y, z) \in D, \quad 1 - y \leq x \leq 3 - y \},$$

donde

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1 - y^2 \}.$$

Por tanto,

$$V = \iiint_W dV = \iint_D \underbrace{\int_{1-y}^{3-y} dx}_{2} \; dzdy = 2 \int_0^1 \underbrace{\int_0^{1-y^2} dz}_{1-y^2} \; dy = \int_0^1 (1 - y^2) dy$$

$$= \frac{2}{3} \text{ u.v.} \blacksquare$$

Ejemplo 2.35. Calculemos la integral $I = \iiint_W x \; dx \, dy \, dz$, siendo W la región acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Consideramos W como una región tipo III.

Solución. Escribimos la región W de tipo III (ver Figura 2.28),

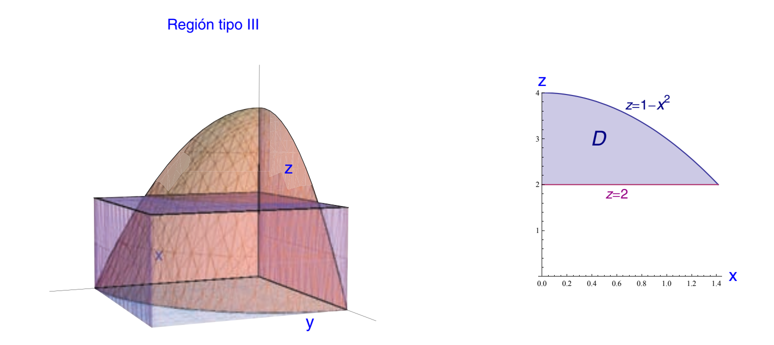


Figura 2.28: Región sólida W como tipo III.

$$W = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad (x, z) \in D, \quad 0 \le y \le \sqrt{4 - x^2 - z}\, \},$$

siendo

$$D = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \le x \le \sqrt{2}, \quad 0 \le z \le 4 - x^2\, \}.$$

Por tanto,

$$I = \iiint_W x\, dV = \iint_D \int_0^{\sqrt{4-x^2-z}} x\, dy\, dxdz = \iint_D x\sqrt{4 - x^2 - z}\, dxdz$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{4-x^2} x\sqrt{4 - x^2 - z} dz\, dx = \int_0^{\sqrt{2}} x \underbrace{\left[-\frac{2}{3}(4 - x^2 - z)^{3/2} \right]_0^{4-x^2}}_{\frac{2}{3}(4-x^2)^{3/2}} dx$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{\sqrt{2}} x(4 - x^2)^{3/2} dx = \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{5}(4 - x^2)^{5/2} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3} \left(-\frac{4\sqrt{2}}{5} + \frac{32}{5} \right)$$

$$= \frac{64 - 8\sqrt{2}}{15}. \ \blacksquare$$

2.2.3. Propiedades de las integrales triples.

Si f y g son funciones integrables en una región W de $\mathbb{R}^3$, se verifican las propiedades siguientes:

(1) Linealidad. Si α, $\beta \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\iiint_W \alpha f + \beta g = \alpha \iiint_W f + \beta \iiint_W g$$

(2) Monotonía. Si $f(x, y, z) \le g(x, y, z)$, $\forall (x, y, z) \in W$, entonces:

$$\iiint_W f \le \iiint_W g$$

(3) Aditividad. Si la región $W = W_1 \cup W_2$, siendo W_1 y W_2 dos regiones cuyos interiores no se intersectan, entonces:

$$\iiint_W f = \iiint_{W_1} f + \iiint_{W_2} f$$

(4) Teorema del valor medio integral: si f es continua en W, entonces existe $(x_0, y_0, z_0) \in W$ tal que

$$\iiint_W f = f(x_0, y_0, z_0)\ vol(W)$$

y por tanto, se define el promedio integral de f en W como:

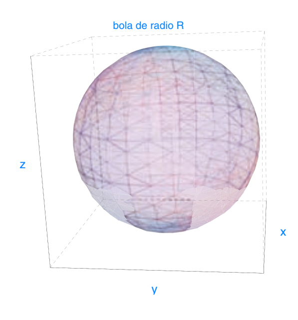
$$p = \frac{\iiint_W f}{vol(W)}$$

La integral triple como volumen de una región sólida

La integral triple nos permite calcular volúmenes de regiones en el espacio. La integral de la función $f(x, y, z) = 1$ sobre $W \subset \mathbb{R}^3$ nos proporciona el volumen de W :

$$vol(W) = \iiint_W dx\, dy\, dz.$$

Ejemplo 2.36. Verifiquemos que $\frac{4}{3}\pi R^3$ es la fórmula del volumen de una bola tridimensional de radio R.



Bola de radio R.

Solución. Podemos considerar la región W ocupada por la bola tridimensional como una región de tipo I. En este caso, la proyección de W sobre el plano XY es la región D formada por un círculo de radio R centrado en el origen,

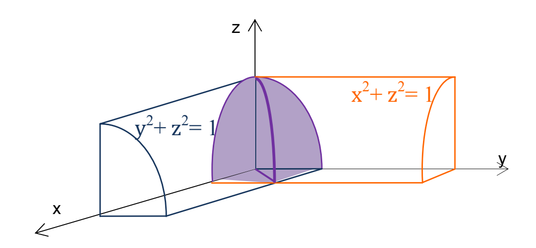
por tanto:

$$V = \iiint_W dV = \iint_D \left[\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \right] dx\, dy$$

$$= \iint_D 2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = 2\int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= -2\int_0^{2\pi} \left[\frac{(a^2 - r^2)^{3/2}}{3} \right]_0^R d\theta = \frac{2R^3}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4\pi}{3} R^3 \text{ u.v.} \blacksquare$$

⬢ **Ejemplo 2.37.** Calculemos el volumen del sólido situado en el primer octante, delimitado por las superficies $x^2 + z^2 = 1$ y $y^2 + z^2 = 1$.



Cilindros en el primer octante.

Solución. Hay que descomponer el volumen en dos partes ya que la región sólida comprendida entre los dos está separada por la intersección de los dos cilindros que calculamos a continuación,

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 + z^2 & = & 1 \\ y^2 + z^2 & = & 1 \end{array}\right\}$$

restando:

$$x^2 - y^2 = 0, \quad \text{por tanto:} \quad y = \pm x.$$

Como estamos en el primer octante, sólo consideramos el plano $y = x$.

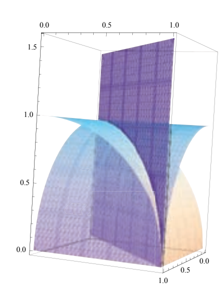


Figura 2.29: Intersección de los cilindros y el plano $y = x$.

Tal y como se ve en el gráfico, distinguimos dos regiones "separadas" W_1 y W_2 tales que $W = W_1 \cup W_2$, luego la integral la calculamos de la forma siguiente:

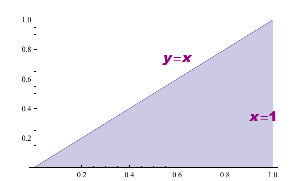
$$\iiint_W f = \underbrace{\iiint_{W_1} f}_{(1)} + \underbrace{\iiint_{W_2} f}_{(2)}.$$

Calculamos cada una de ellas.
(1) Tomamos W_1 la región de la izquierda en la Figura 2.29. El trozo de cilindro que queda por arriba es el que sigue el eje y que tiene por ecuación $x^2+z^2=1$,

$$W_1 = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad (x,y) \in D_1; \quad 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2}\ \},$$

donde D_1 la consideramos como una región tipo 1,

$$D_1 = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq x\ \}.$$



Región D_1.

Así, tenemos

$$\iiint_{W_1} dx\,dy\,dz = \iint_{D_1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz\ dx\,dy = \iint_{D_1} \sqrt{1-x^2}dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \int_0^x dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ \underbrace{[y]_0^x}_{x}\ dx = \frac{1}{-2}\int_0^1 -2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

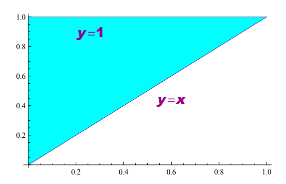
$$= \frac{1}{-2}\left[\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{-2}\left[0-\frac{1}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{3}.$$

(2) Hacemos lo mismo con W_2, la región de la derecha en la Figura 2.29. El trozo de cilindro de ecuación $y^2+z^2=1$ que queda por arriba es el que sigue el eje X,

$$W_2 = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad (x,y) \in D_2; \quad 0 \leq z \leq \sqrt{1-y^2}\ \},$$

donde D_2 la consideramos tipo 2 para que resulte más sencillo calcular la integral,

$$D_2 = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ 0 \leq y \leq 1,\ \ 0 \leq x \leq y\ \}.$$



Región D_2.

Luego el volumen de W_2 es:

$$\iint_{W_2} dx\,dy\,dz = \iint_{D_2} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz\ dx\,dy = \iint_{D_2} \sqrt{1-y^2}dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^y \sqrt{1-y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \sqrt{1-y^2} \int_0^y \ dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\ \underbrace{[x]_0^y}_{y}\ dy = \frac{1}{-2}\int_0^1 -2y(1-y^2)^{\frac{1}{2}}\,dy$$

$$= \frac{1}{-2}\left[\frac{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{-2}\left[0 - \frac{1}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{3}.$$

El resultado total es la suma de los dos,

$$\iint_W f = \iint_{W_1} f + \iint_{W_2} f = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\ \text{ u. v.}\ \blacksquare$$

Ejercicio 2.14. Calcula el volumen de la región W limitada por los paraboloides $z = x^2 + y^2$, $z = 4x^2 + 4y^2$, el cilindro $y = x^2$ y el plano $y = 3x$. (Solución: $\frac{9477}{35}$ u.v.).

2.2.4. Cambio de variables en integrales triples

Dada una integral triple sobre una región W:

$$\iiint_W f(x,y,z)\ dx\,dy\,dz,$$

nos proponemos realizar un cambio a unas nuevas variables u, v, w, de modo que tanto el integrando como la nueva región de integración W^* en el nuevo espacio sean más sencillos (ver Figura 2.30).

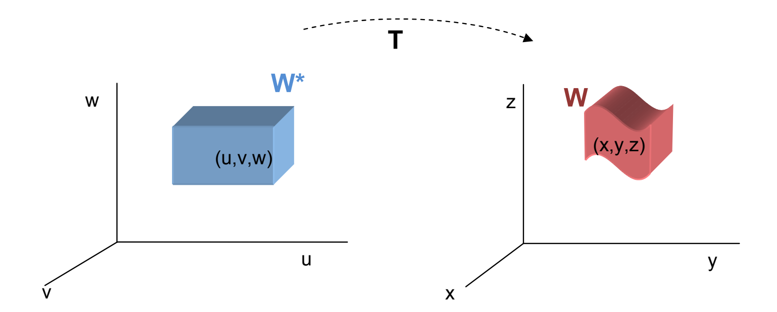


Figura 2.30: Cambio de variables en $\mathbb{R}^3$.

El cambio de variables viene definido por una transformación

$$T : W^* \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

de la forma:

$$T(u, v, w) = (x, y, z) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

que manda los puntos de coordenadas (u, v, w) de W^* a los puntos de coordenadas (x, y, z) de $W = T(W^*)$.

Como en el caso de las integrales dobles se exige que $T \in \mathcal{C}^1$ sea biyectiva y que su jacobiano:

$$JT = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

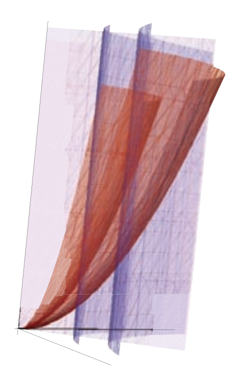
no se anule en W^*.

Bajo estas condiciones la fórmula del cambio de variables en integrales triples es:

$$\iiint_W f(x, y, z) dx\, dy\, dz =$$
$$= \iiint_{W^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| JT \right| du\, dv\, dw.$$

Recordemos que podemos aplicar esta fórmula aun cuando las condiciones exigidas no se verifiquen sobre la frontera de W^*.

Ejemplo 2.38. Calculemos el volumen de la región W del primer octante $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$ limitada por los paraboloides $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, por los cilindro $xy = 1$, $xy = 4$ y por los planos $y = x$ e $y = 5x$.



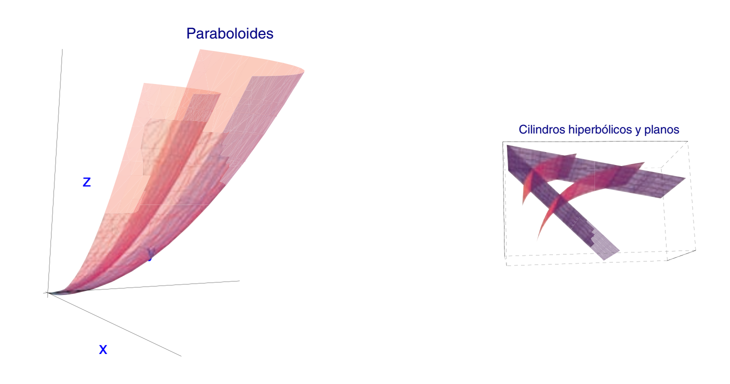
Región de integración W.

Solución. El volumen viene dado por

$$V = \iiint_W dx\,dy\,dz.$$

La integral será más sencilla de resolver si consideramos el cambio $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$, $w = \dfrac{z}{x^2+y^2}$. Con este cambio, W se transforma en la región W^* dada por:

$$1 \leq u \leq 4, \quad 1 \leq v \leq 5, \quad 1 \leq w \leq 2.$$



Superficies que delimitan el sólido.

El Jacobiano de esta transformación es:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{1/v}{2\sqrt{u/v}} & \frac{-u/v^2}{2\sqrt{u/v}} & 0 \\ \frac{v}{2\sqrt{u\,v}} & \frac{u}{2\sqrt{u\,v}} & 0 \\ \frac{w(1+v^2)}{v} & \frac{u\,w(v^2-1)}{v^2} & \frac{u(1+v^2)}{v} \end{vmatrix} = \frac{u(1+v^2)}{2v^2}.$$

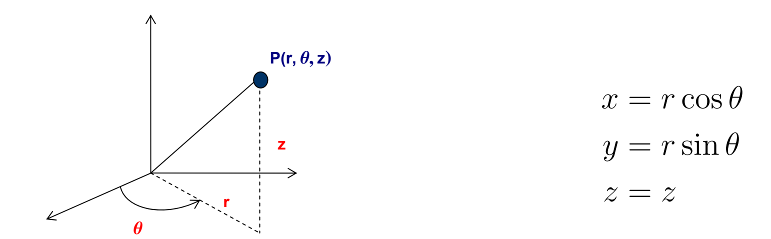
Observamos que el jacobiano no se anula en W^*. Entonces:

$$\begin{aligned}\iiint_W dxdydz &= \int_1^4\int_1^5\int_1^2 \frac{u(1+v^2)}{2v^2}dwdvdu = \int_1^4\int_1^5 \frac{u(1+v^2)}{2v^2}dvdu \\ &= \int_1^4 \frac{u}{2}\int_1^5 (\frac{1}{v^2}+1)dvdu = \int_1^4 \frac{u}{2}\left[\frac{-1}{v}+v\right]_1^5 du \\ &= \frac{24}{5}\int_1^4 \frac{u}{2}du = \frac{12}{5}\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^4 = \frac{12}{5}(8-\frac{1}{2}) = 18 \text{ u.v.} \blacksquare\end{aligned}$$

Los cambios de variables en integrales triples más habituales son los cambios a coordenadas cilíndricas y a coordenadas esféricas que estudiamos a continuación.

Coordenadas cilíndricas

Para un punto $P = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, introducimos 3 nuevas coordenadas (r, θ, z) dadas por:



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

es decir, x e y se reemplazan por sus coordenadas polares en el plano XY y z queda igual. A la terna (r, θ, z) se le llama coordenadas cilíndricas del punto P. Para que la aplicación sea biyectiva haremos $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $-\infty < z < +\infty$.

El jacobiano de esta transformación es

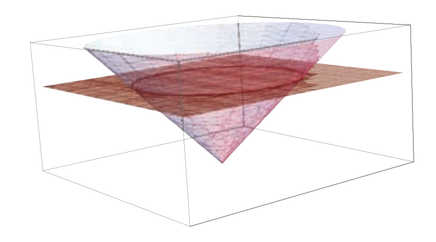
$$JT = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = r.$$

La fórmula del cambio de variables a cilíndricas queda:

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz.$$

Este cambio será útil cuando la región de integración conste de porciones de cilindros o planos y la proyección D conste de porciones de círculos, coronas...(esto ocurrirá cuando sean superficies de revolución que tengan al eje Z como eje de simetría, como cilindros, paraboloides, conos...).

⬣ **Ejemplo 2.39.** Calculemos la integral $I = \int\int\int_W (1+(x^2+y^2)^2)\,dx\,dy\,dz$ siendo W la región limitada por el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y el plano $z = 2$.



Región sólida comprendida entre el cono y el plano.

Solución.

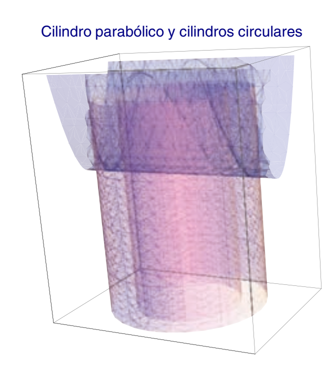
$$I = \int\int\int_W (1 + (x^2 + y^2)^2)\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (1 + (x^2 + y^2)^2)\, dz \right] dx\, dy$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_r^2 (1 + r^4)\, r\, dz\, d\theta\, dr = \int_0^2 (r + r^5) \int_0^{2\pi} [z]_r^2\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^2 (r + r^5)(2 - r) \int_0^{2\pi} d\theta\, dr = 2\pi \int_0^2 (r + r^5)(2 - r)\, dr$$

$$= 2\pi \left[r^2 + \frac{r^6}{3} - \frac{r^3}{3} - \frac{r^7}{7} \right]_0^2 = \frac{184\pi}{21}. \blacksquare$$

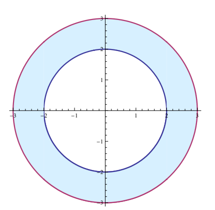
⬢ **Ejemplo 2.40.** Calculemos el volumen del sólido limitado por los cilindros circulares rectos: $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, el plano $z = 0$ y la superficie $z - x^2 - 5 = 0$.



Región sólida comprendida entre los tres cilindros.

Solución. El volumen comprendido entre los cilindros parabólico y circulares queda determinado por:

$$W = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in D;\ 0 \leq z \leq x^2 + 5 \,\},$$



Región D.

siendo D en coordenadas polares:

$$D = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2/\ 2 \leq r \leq 3;\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \,\}.$$

Por tanto, el volumen es:

$$V = \iiint_W dx\, dy\, dz = \iint_D \int_0^{x^2+5} dz\ dxdy = \iint_D (x^2+5) dxdy$$

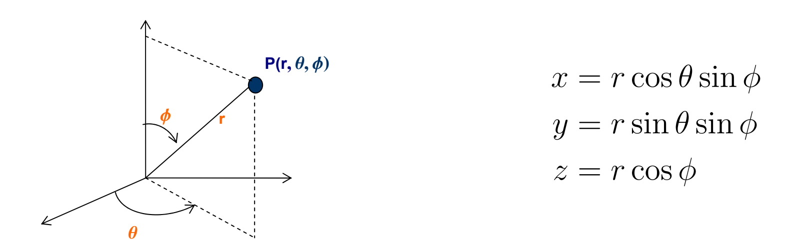
$$= \int_0^{2\pi} \int_2^3 (r^2 \cos^2\theta)\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{5r^2}{2} + \frac{1}{4} r^4 \cos^2\theta\right]_2^3 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{25}{2} + \frac{65}{4}\cos^2\theta\right] d\theta = \left[\frac{165\theta}{8} + \frac{65}{16}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{165\pi}{4} \text{u.v.} \ \blacksquare$$

⬢ **Ejercicio 2.15.** Halla, mediante una integral triple el volumen del elipsoide sólido dado por $4x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 16$. (Solución: $\frac{64\pi}{3}$ u.v.).

Coordenadas esféricas

Para un punto $P = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, introducimos 3 nuevas coordenadas (r, θ, ϕ) dadas por:



$$x = r\cos\theta\sin\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi$$
$$z = r\cos\phi$$

A la terna (r, θ, ϕ) se le llama coordenadas esféricas del punto P. Para que la aplicación sea biyectiva, excepto a lo sumo en un conjunto de contenido nulo, haremos $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$.

El jacobiano de esta transformación es

$$JT = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{pmatrix} = -r^2\sin\phi.$$

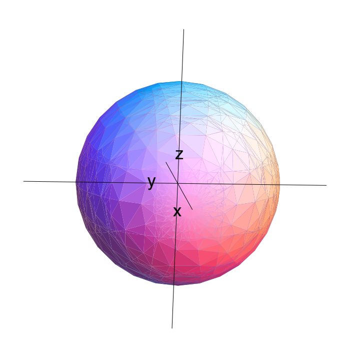
La fórmula del cambio de variables a esféricas queda:

$$\iiint_W f(x,y,z)dx\,dy\,dz$$
$$= \iiint_{W^*} f(r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi)r^2\sin\phi\; dr\, d\theta\, d\phi.$$

Nota 2.3. Puesto que $0 \leq \phi \leq \pi$, se tiene que $\sin\phi \geq 0$.

Esta transformación es recomendable cuando en la región de integración aparezcan esferas o trozos de ella o cuando en el integrando aparezcan expresiones del tipo $x^2+y^2+z^2$, que se transforman en r^2.

Ejemplo 2.41. Calculemos la integral $I = \iiint_W \sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}\,dx\,dy\,dz$ siendo W la región limitada por la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$.



Esfera de radio R.

Solución. Mediante un cambio a coordenadas esféricas, la nueva región de integración será:

$$W^* = \{(r,\theta,\phi) : 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi\}$$

por tanto,

$$I = \iiint_W \sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{R^2-r^2}\,r^2\,\sin\phi\,d\phi\,d\theta\,dr$$
$$= \int_0^R r^2\sqrt{R^2-r^2} \int_0^{2\pi} [-\cos\phi]_0^{\pi}\ d\theta\,dr = 2\int_0^R r^2\sqrt{R^2-r^2} \int_0^{2\pi} d\theta\,dr$$
$$= 4\pi \int_0^R r^2\sqrt{R^2-r^2}\,dr = (\text{haciendo el cambio} r = R\sin t)$$
$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt = \pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2}\,dt$$
$$= \frac{\pi R^4}{2}\left[t - \frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^4}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 R^4}{4}. \blacksquare$$

Ejercicio 2.16. Evalúa $\int_W exp(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\,dV$ donde W es al bola unitaria de radio unidad en $\mathbb{R}^3$. (Solución: $\frac{4\pi}{3}(e-1)$).

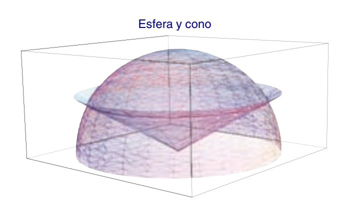
2.2.5. Aplicaciones de la integral triple

1. Volúmenes de cuerpos en el espacio.

Dada una región W del espacio:

$$vol(W) = \iiint_W dx\, dy\, dz.$$

⬢ **Ejemplo 2.42.** Hallemos el volumen de la región sólida W encerrada por la la hoja superior del cono $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.



Región sólida entre la esfera y el cono.

Solución. El volumen se calcula haciendo la integral $V = \iiint_W dx\, dy\, dz$, que resulta más sencilla considerando coordenadas esféricas. En estas coordenadas, la ecuación del cono quedará:

$$z^2 = 3x^2 + 3y^2 \to r^2 \cos^2 \phi = 3r^2 \sin^2 \phi \to \tan^2 \phi = \frac{1}{3} \to \phi = \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}.$$

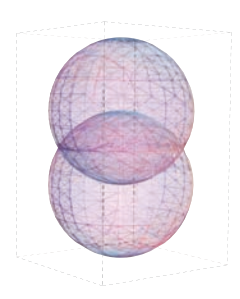
Puesto que se trata de la hoja superior del cono, consideramos el ángulo $\frac{\pi}{6}$, y su ecuación en coordenadas esféricas es $\phi = \frac{\pi}{6}$.Por tanto,

$$V = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \, dr = \int_0^3 r^2 \int_0^{2\pi} [-\cos \phi]_0^{\frac{\pi}{6}} \, d\theta \, dr$$

$$= (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \int_0^3 r^2 \, [\theta]_0^{2\pi} \, dr = 2\pi(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^3 = 9\pi(2 - \sqrt{3}) \text{ u.v.} \blacksquare$$

⬢ **Ejercicio 2.17.** Resuelve el ejemplo anterior utilizando coordenadas cilíndricas.

⬢ **Ejemplo 2.43.** Hallemos el volumen del recinto situado entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$.



Región sólida entre ambas esferas.

Solución. Calculando la intersección entre las dos esferas, obtenemos la curva definida por $x^2 + y^2 = 3$, con $z = 1$. El recinto situado entre las esferas está limitado superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e inferiormente por $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ y su proyección en el plano XY es la región D definida por $x^2 + y^2 \leq 3$. Por tanto, el volumen vendrá dado por

$$V = \iiint_W dV = \iint_D \int_{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz dA = \iint_D (2\sqrt{4-x^2-y^2} - 2) dx dy$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-r^2} - 1) r \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (2r\sqrt{4-r^2} - 2r \,) \, dr$$

$$= 2\pi \left[-\frac{2(4-r^2)^{3/2}}{3} - r^2 \right]_0^{\sqrt{3}} = 2\pi(-3 - \frac{2}{3} + \frac{16}{3}) = \frac{10\pi}{3} \text{u.v.} \blacksquare$$

2. Cálculo de masas y centros de masa para el caso de sólidos.

La masa total de un sólido con densidad $\rho(x, y, z)$ en cada punto viene dada por:

$$M = \int\int\int_W \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

y las coordenadas del centro de masa vienen dadas por:

$$\bar{x} = \frac{\iiint_W x \, \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{M} \qquad \bar{y} = \frac{\iiint_W y \, \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{M}$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_W z \, \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{M}$$

Ejemplo 2.44. Calculemos la masa del sólido limitado por dos esferas con centro en el origen y radios 1 y 2, respectivamente e interior a la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, siendo la densidad en cada punto igual a su distancia al origen.

Solución. La superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la hoja superior de un cono y entendemos que la región interior al cono es la que se encuentra por "arriba del cono". La región W cuya masa queremos calcular es la que muestra la Figura 2.31:

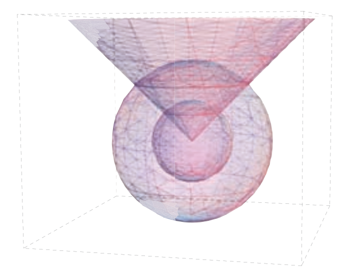


Figura 2.31: Región sólida entre las esferas y el cono.

Su masa vendrá dada por:

$$M = \iiint_W \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Esta integral es más sencilla si hacemos un cambio a coordenadas esféricas. En estas coordenadas las ecuaciones de las esferas son $r = 1$ y $r = 2$, respectivamente; la ecuación del cono es $\phi = \frac{\pi}{4}$ y la densidad en cada punto es r :

$$M = \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} r\, r^2 \sin\phi\, d\theta\, d\phi\, dr = 2\pi \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^3 \sin\phi\, d\phi\, dr =$$

$$= 2\pi \int_1^2 r^3 \left[-\cos\phi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} dr = 2\pi(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 = (2 - \sqrt{2})\frac{15\pi}{4} \text{ u.m.} \blacksquare$$

⬢ **Ejemplo 2.45.** Un sólido está limitado por dos hemisferios concéntricos de radios a y b, $0 < a < b$. Si la densidad es constante, hallemos el centro de gravedad (de masas).

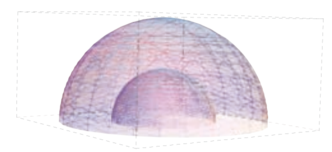
Solución. Su masa vendrá dada por:

$$M = \iiint_W \rho\, dx\, dy\, dz = \rho \iiint_W dx\, dy\, dz = \rho\, vol(W)$$

$$= \rho(\frac{2\pi b^3}{3} - \frac{2\pi a^3}{3}) = \frac{2\pi\rho(b^3 - a^3)}{3} \text{ u.m.}$$

Considerando coordenadas esféricas el sólido ocupa la región:

$$W^* = \{(r, \theta, \phi) : a \le r \le b,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}\}$$



Región sólida entre las semiesferas.

Sean $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ las coordenadas del centro de masas. Debido a que el sólido es homogéneo y simétrico respecto del eje Z, se obtendrá que $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Calculemos la coordenada $\overline{z}$:

$$\overline{z} = \frac{1}{M} \iiint_W z\, \rho\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{M} \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos\phi\, \rho\, r^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta\, dr$$

$$= \frac{1}{M} \rho \int_a^b r^3 \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\cos 2\phi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, dr = \frac{1}{M} \rho \frac{1}{2} \int_a^b r^3 \left[\theta\right]_0^{2\pi} dr$$

$$= \frac{3}{2\pi\rho(b^3 - a^3)} \rho\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_a^b = \frac{3}{2(b^3 - a^3)} \frac{b^4 - a^4}{4} = \frac{3}{8} \frac{b^4 - a^4}{b^3 - a^3}. \blacksquare$$

Ejercicio 2.18. Calcula el centro de masas del cuerpo homogéneo W limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 1$. (Solución: c.m.: $(0, 0, \frac{2}{3})$).

Ejercicio 2.19. Calcula el centro de masas del cubo unidad $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ suponiendo que la densidad en cada punto (x, y, z) es proporcional al cuadrado de su distancia al origen. (Solución: c.m.:$(\frac{7}{12}, \frac{7}{12}, \frac{7}{12})$).

3. Momentos de inercia.

En el caso de un sólido de densidad $\rho(x, y, z)$ y ocupando una región W, los momentos de inercia respecto al eje X, al eje Y y al eje Z, respectivamente, son:

$$I_x = \iiint_W (y^2 + z^2)\, \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$I_y = \iiint_W (x^2 + z^2)\, \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$I_z = \iiint_W (x^2 + y^2)\, \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

En general, el momento de inercia respecto de una recta L será:

$$I_L = \iiint_W d((x, y, z), L)^2\, \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

siendo $d((x, y, z), L)$ la distancia del punto (x, y, z) a la recta L.

Por último, el momento de inercia respecto del origen de coordenadas es:

$$I_O = \iiint_W (x^2 + y^2 + z^2)\, \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Ejemplo 2.46. Hallemos los momentos de inercia respecto de los ejes X e Y de la región sólida comprendida entre el hemisferio $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ y el plano XY, siendo la densidad en (x, y, z) proporcional a la distancia del punto al plano XY.

Solución. Tenemos que $\rho(x,y,z) = k\,z$. Por simetría $I_x = I_y$:

$$I_x = I_y = \iiint_W (y^2+z^2)\,k\,z\,dV = k\iint_D \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (y^2z+z^3)dz\,dx\,dy$$

$$= k\iint_D \left[\frac{y^2z^2}{2}+\frac{z^4}{4}\right]_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dx\,dy$$

$$= k\iint_D (\frac{y^2(4-x^2-y^2)}{2}+\frac{(4-x^2-y^2)^2}{4})dx\,dy$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^2\int_0^{2\pi}\left(r^2\sin^2\theta(4-r^2)+\frac{(4-r^2)^2}{2}\right) r\,d\theta\,dr$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^2 r^3(4-r^2)\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\,dr + \frac{k}{4}\int_0^2 r\,(4-r^2)^2\int_0^{2\pi}d\theta\,dr$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^2 r^3(4-r^2)\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} dr + \frac{k}{4}2\pi\int_0^2(16r+r^5-8r^3)dr$$

$$= \frac{k\pi}{2}\left[r^4-\frac{r^6}{6}\right]_0^2 + \frac{k\pi}{2}\left[8r^2+\frac{r^6}{6}-2r^4\right]_0^2 = \frac{k\pi}{2}16 = 8k\pi.\ \blacksquare$$

Ejercicio 2.20. Calcula el momento de inercia I_z del sólido situado por encima del plano XY, acotado por el paraboloide $z = x^2+y^2$ y el cilindro $x^2+y^2 = a^2$, siendo a y la densidad de masa constantes. (Solución: $\dfrac{\pi a^6\rho}{3}$).

4. Promedios de funciones de tres variables.

El valor promedio f_p de una función f en una región sólida W de $\mathbb{R}^3$ viene dado por:

$$f_p = \frac{\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{vol(W)}$$

Ejemplo 2.47. Calculemos la temperatura promedio T_m del sólido limitado por el paraboloide $z = x^2+y^2$, el cilindro $x^2+y^2 = a^2$ y el plano XY, siendo la temperatura en cada punto igual a su distancia al plano XY.

Solución. La temperatura promedio vendrá dada por:

$$T_m = \frac{\iiint_W T(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{vol(W)}$$

donde la temperatura en un punto (x,y,z) es $T(x,y,z) = z$.

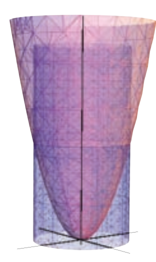


Figura 2.32: Región comprendida entre el cilindro, el paraboloide y el plano.

Por otra parte, el sólido sobre el que integramos para hallar la temperatura promedio viene dado por la región W de $\mathbb{R}^3$ que está limitada superiormente por el paraboloide, inferiormente por el plano XY y lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ (ver Figura 2.32). La proyección de W sobre el plano XY es un círculo de radio a. Por tanto, las coordenadas cilíndricas son las más adecuadas para calcular la integral:

$$T_m = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} z\, r\, dz\, d\theta\, dr}{\int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} r\, dz\, d\theta\, dr} = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{r^2} r\; d\theta\, dr}{\int_0^a \int_0^{2\pi} r\, [z]_0^{r^2}\; d\theta\, dr} = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{2} r\; d\theta\, dr}{\int_0^a \int_0^{2\pi} r^3\, d\theta\, dr}$$

$$= \frac{\pi \int_0^a r^5\, dr}{2\pi \int_0^a r^3\; dr} = \frac{\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^a}{2\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a} = \frac{a^2}{3} \text{ u.t.} \blacksquare$$

⬣ **Ejercicio 2.21.** Halla la densidad promedio del sólido limitado superiormente por la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ e inferiormente por el cono $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$, siendo la densidad en cada punto del sólido $\rho(x, y, z) = z$. (Solución: $\frac{3}{8(\sqrt{3}-2)}$ u.t.)

2.2.6. Ejercicios de la sección 2.2

1. Calcula la siguiente integral cambiando el orden de integración:

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_x^{\sqrt{\pi/2}} \int_1^3 \sin y^2\; dzdydx.$$

(Solución: 1).

2. Halla el volumen de un cilindro circular recto de radio R y altura h. (Solución: $\pi R^2 h$ u.v.).

3. Calcula el volumen de la región sólida dada por:

$$W = \{0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4};\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

(Solución: $\frac{7-3\sqrt{3}}{12}\pi$ u.v.).

4. Calcula el volumen de la región sólida encerrada por las superficies $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + (y+1)^2 = 1$ y el plano $z = 0$. (Solución: $4\pi - \frac{32}{9}$ u.v.).

5. Calcula $\iiint_W x\, y\, z\, dx\, dy\, dz$ siendo W la región dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, contenida en el primer octante. (Solución: $\frac{243}{16}$).

6. Calcula el volumen del sólido encerrado por el paraboloide $z = 1+x^2+y^2$ y el cono $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$. (Solución: $\frac{5\pi}{6}$ u.v.).

7. Calcula el volumen encerrado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ que queda fuera de la superficie $z = 2 + x^2 + y^2$. (Solución: $\frac{40\sqrt{10}+123}{6}\pi$ u.v.).

8. Halla el volumen del sólido que queda fuera de la superficie $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$, con $z \geq 0$. (Solución: 9π u.v.).

9. Calcula el volumen de la región sólida comprendida entre el paraboloide $y = x^2 + z^2$ y el plano $y = 4$. (Solución: 8π u.v.).

10. Calcula, mediante una integral triple, el volumen de la región limitada inferiormente por el paraboloide $z = x^2+y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$. (Solución: $4\pi\sqrt{6} - \frac{22}{3}\pi$ u.v.).

11. Calcula la integral triple $\iiint_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$ siendo W la región sólida comprendida entre las superficies $z^2 = 3x^2 + 3y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ cuando $z \geq 0$. (Solución: $136(2 - \sqrt{3})\pi$).

12. Calcula la masa del sólido comprendido entre las superficies

$$z = \sqrt{2x^2 + 2y^2} \quad \text{y} \quad x^2 + (y-1)^2 = 1$$

y el plano $z = 0$, siendo la densidad en cada punto del sólido $\rho(x, y, z) = k$. (Solución: $\frac{32\sqrt{2}}{9}k$ u.m.).

13. Halla el momento de inercia de un cubo homogéneo de densidad ρ_0, de lado a, respecto de una de sus aristas. (Solución: $\dfrac{2a^5\rho_0}{3}$).

14. Sea W la región sólida limitada por el cubo $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$. Si la temperatura en cada punto de W es proporcional al cuadrado de la distancia al origen, ¿cuál es la temperatura promedio? ¿En qué puntos de W la temperatura es igual a la temperatura promedio?. (Solución: k; Los puntos donde la temperatura es igual a la temperatura promedio serán los puntos situados sobre la esfera de radio 1 centrada en el origen).

TEMA 3

INTEGRACIÓN SOBRE CURVAS Y SUPERFICIES

INTRODUCCIÓN

Continuando con la generalización de la integral, nos planteamos ahora definir el concepto de integral cuando la región de integración es una curva o una superficie. Además, con este tipo de integrales podremos integrar tanto funciones escalares como funciones vectoriales. Por tanto, los objetivos de este tema son:

- Definir el concepto de integral de una función escalar para el caso en que la región de integración sea una curva inmersa en un espacio de dimensión n, aunque nos centraremos en ejemplos con curvas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

- Definir el concepto de integral de una función escalar para el caso en que la región de integración sea una superficie en $\mathbb{R}^3$.

- Definir las integrales sobre curvas y superficies en el caso en que el integrando sea un campo vectorial.

- Deducir fórmulas para resolver problemas de cálculo de longitudes de arco, áreas de superficies, cálculo de trabajos o cálculo de flujos, además de la generalización de fórmulas para el cálculo de centros de masa o momentos de inercia tanto de curvas como de superficies.

- Aplicar los teoremas relacionados con este tipo de integrales: teorema de Green, teorema de Stokes y teorema de la divergencia.

3.1. INTEGRALES DE CAMINO

Como se ha dicho anteriormente, las regiones de integración van a ser curvas en $\mathbb{R}^n$ y los integrandos podrán ser funciones vectoriales o escalares. En el caso en que el integrando sea una función escalar, nos referiremos a este tipo de integrales como *integrales de línea respecto a la longitud de arco*, o bien *integrales de camino*. En el caso en que el integrando sea una función vectorial las llamaremos *integrales de línea.*

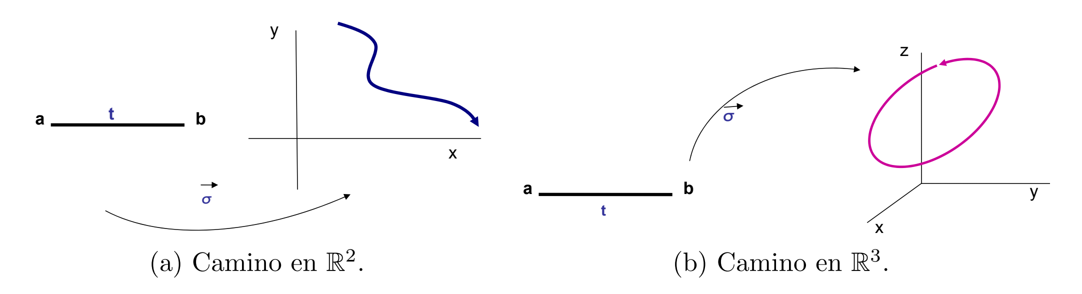
Entre las distintas motivaciones que dan lugar a este tipo de integrales se encuentran los problemas relacionados con el cálculo del trabajo realizado por una fuerza para llevar una partícula de un lugar a otro siguiendo una trayectoria determinada en el espacio o bien los problemas relacionados con el cálculo de la masa total y de los momentos de un cuerpo unidimensional, cuya forma es una curva en el espacio, conocida su densidad lineal en cada punto.

Veamos a continuación un breve repaso de los conceptos que vamos a utilizar.

3.1.1. Definiciones y ejemplos

Un camino o trayectoria en $\mathbb{R}^n$ es una función $\vec{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ continua,

$$\begin{array}{rccl} \vec{\sigma}: & [a,b] & \to & \mathbb{R}^n \\ & t & \to & (\sigma_1(t), \sigma_2(t), ..., \sigma_n(t)) \end{array}$$



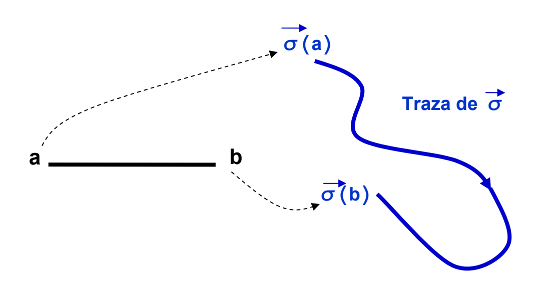
(a) Camino en $\mathbb{R}^2$. (b) Camino en $\mathbb{R}^3$.

Caminos en $\mathbb{R}^n$.

Por tanto, un camino es una función continua que a cada $t \in [a, b]$ le asigna un punto en el espacio $\mathbb{R}^n$. En el caso de dimensión 2 ó 3, podemos imaginar un objeto moviéndose en el plano o en el espacio y podemos pensar en la variable t como el tiempo. Entonces, $\vec{\sigma}(t)$ será la posición del objeto, en el plano o en el espacio, en cada instante t.

Los puntos $\vec{\sigma}(a)$ y $\vec{\sigma}(b)$ son los extremos del camino; $\vec{\sigma}(a)$ es el punto inicial y $\vec{\sigma}(b)$ es el punto final.

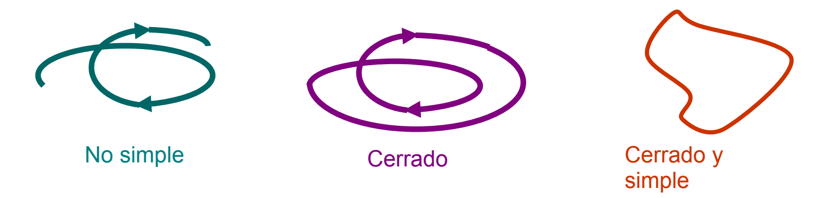
Al conjunto de imágenes $\vec{\sigma}(I) \subset \mathbb{R}^n$ se le llama curva o traza del camino $\vec{\sigma}$.



Elementos de una curva.

La función $\vec{\sigma}$ es una parametrización de la curva y a t le llamaremos parámetro.

Diremos que $\vec{\sigma}$ es un camino simple si $\vec{\sigma}$ es inyectiva en $[a, b]$, es decir, si no tiene autointersecciones; $\vec{\sigma}$ es un camino cerrado si $\vec{\sigma}(a) = \vec{\sigma}(b)$. Finalmente, diremos que $\vec{\sigma}$ es un camino cerrado simple si $\vec{\sigma}$ es inyectiva en $[a, b]$ y $\vec{\sigma}(a) = \vec{\sigma}(b)$.



Distintos tipos de caminos.

Ejemplo 3.1. El segmento que tiene por extremos los puntos $\vec{p}$ y $\vec{q}$ de $\mathbb{R}^3$ es la curva correspondiente al camino $\vec{\sigma} : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ donde $\vec{\sigma}(t) = (1-t)\,\vec{p}+t\,\vec{q}$. ■

Ejemplo 3.2. Una circunferencia de radio a y centro $(0, 0)$ en el plano se puede parametrizar mediante el camino:

$$\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{\sigma}(t) = (a\cos t, a\sin t).$$

Por otra parte,

$$\vec{\mu} : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{\mu}(t) = (a\cos t, a\sin t)$$

también es un camino que parametriza la misma curva. Observemos que se trata de una misma curva, la circunferencia, recorrida de dos veces. ■

Ejemplo 3.3. (a) El camino $\vec{\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (t, t^2)$ tiene asociada una curva que es la parábola $y = x^2$, es decir, coincide con la gráfica de la función $f(x) = x^2$.
(b) El camino $\vec{\sigma} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (t, t^2)$ tiene asociado el trozo de parábola $y = x^2$, con punto inicial $(0, 0)$ y punto final $(1, 1)$.■

Las gráficas de funciones continuas en el plano, $y = f(x)$, son ejemplos de curvas y podemos utilizar la parametrización

$$\vec{\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{\sigma}(t) = (t, f(t)).$$

Ejercicio 3.1. Parametriza la curva que se obtiene como la representación gráfica de $f(x) = 3x^3 - \dfrac{2}{x^3} + 5$ donde $x \in [3, 6]$. (Solución: $\vec{\sigma}(t) = \left(t, 3t^3 - \frac{2}{t^3} + 5\right)$, $t \in [3, 6]$).

Dado un camino $\vec{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, podemos expresar $\vec{\sigma}(t)$ como

$$\vec{\sigma}(t) = (\sigma_1(t),\, \sigma_2(t), \ldots,\, \sigma_n(t)),$$

las funciones $\vec{\sigma}_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ se llaman funciones coordenadas de $\vec{\sigma}$. Para curvas en el plano o en el espacio utilizamos la siguiente notación:

- Para curvas en $\mathbb{R}^2$: $\vec{\sigma}(t) = (x(t), y(t))$.
- Para curvas en $\mathbb{R}^3$: $\vec{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

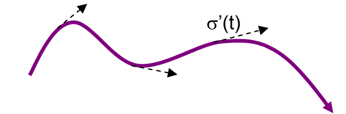
Veamos a continuación algunas nociones que aparecerán a lo largo de este tema.

Un camino $\vec{\sigma}$ es diferenciable si y sólo si cada una de sus funciones coordenadas es diferenciable (derivable).

Si $\vec{\sigma}$ es un camino diferenciable, entonces el vector

$$\vec{\sigma}'(t) = (\sigma_1'(t),\, \sigma_2'(t), \ldots, \sigma_n'(t))$$

se llama vector velocidad del camino $\vec{\sigma}$ en t. Dicho vector es tangente a la curva en cada punto de $\vec{\sigma}(t)$.



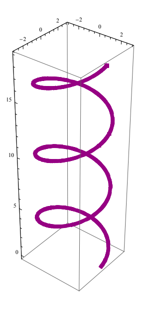
Vector tangente a una curva.

Se define la rapidez con la que se recorre el camino $\vec{\sigma}(t)$ como el valor $\|\vec{\sigma}'(t)\|$.

Imaginemos $\vec{\sigma}(t)$ como la trayectoria de una partícula que se mueve con rapidez $\|\vec{\sigma}'(t)\|$. Podemos calcular la longitud de la curva que describe la partícula, aproximando dicha longitud como suma de pequeños recorridos donde la rapidez no varía; por tanto, cada uno de ellos será el producto de la rapidez por el tiempo. Aplicando el concepto de integral de una variable, llegamos a que la longitud de la curva, conocida como longitud de arco, viene dada por:

$$l(\vec{\sigma}) = \int_a^b \|\vec{\sigma}'(t)\|\, dt$$

⬢ **Ejemplo 3.4.** Veamos que para la hélice dada por $\vec{\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\vec{\sigma}(t) = (\cos t,\, \sin t,\, t)$ la rapidez es constante y la velocidad no.



Hélice.

Solución. El vector velocidad es $\vec{\sigma}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ y la rapidez en cada punto es $\|\vec{\sigma}'(t)\| = \sqrt{2}$, es decir, la rapidez es constante y la velocidad no. ■

Ejemplo 3.5. Calculemos la longitud del trozo de hélice definido por $\vec{\sigma}$: $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{\sigma}(t) = (\cos t,\, \sin t,\, t)$.

Solución. La longitud viene dada por:

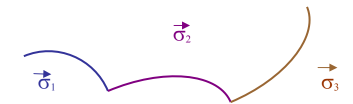
$$l(\vec{\sigma}) = \int_0^{2\pi} \|\vec{\sigma}'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi \text{ u.l.} \quad \blacksquare$$

Un camino diferenciable $\vec{\sigma} : I \to \mathbb{R}^n$ es regular si $\vec{\sigma}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$.

En ocasiones aparecen curvas que están formadas por la unión de curvas regulares. Para representarlas trabajaremos con caminos regulares de clase $\mathcal{C}^1$ o bien $\mathcal{C}^1$ a trozos. Si $\vec{\sigma}$ es un camino $\mathcal{C}^1$ a trozos formado por los caminos regulares $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \cdots, \vec{\sigma}_n$, utilizaremos la notación:

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_1 +, \vec{\sigma}_2 + \cdots + \vec{\sigma}_n.$$

Nota 3.1. Decimos que un camino es $\mathcal{C}^1$ a trozos si su derivada existe y es continua salvo en una cantidad finita de puntos del intervalo donde está definido I.



Camino $\mathcal{C}^1$ a trozos.

Podemos imaginar que una partícula describe un camino no regular si se produce alguna "parada" o "retroceso".

Sea $\vec{\sigma} : I \to \mathbb{R}^n$ un camino en $\mathbb{R}^n$ y sea $h : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$, con $h(J) = I$, tal que $h'(s) \neq 0$, $\forall s \in J$, al camino $\vec{\rho} = \vec{\sigma} \circ h : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se le llama reparametrización de $\vec{\sigma}$.

Podemos pensar en una reparametrización como un cambio en la rapidez con que se mueve un punto a lo largo de la trayectoria. Por definición, h manda extremos de J a extremos de I, distinguiremos, por tanto, dos tipos de reparametrización:

- Si $h'(s) > 0$ $\forall s \in J$, la reparametrización conserva la orientación del recorrido.
- Si $h'(s) < 0$ $\forall s \in J$, la reparametrización invierte la orientación.

Una reparametrización de interés es la que nos proporciona la trayectoria opuesta a una dada, esto es, recorrida en sentido inverso. Dado un camino $\vec{\sigma}(t)$, con $\vec{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, la trayectoria opuesta se consigue mediante la función

$$h : [a, b] \to [a, b], \quad h(t) = a + b - t.$$

El resultado es un nuevo camino

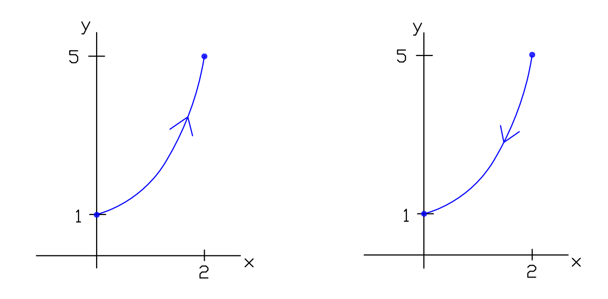
$$\vec{\rho} : [a, b] \to \mathbb{R}^n, \quad \text{donde} \quad \vec{\rho}(t) = \vec{\sigma}(a + b - t),$$

es decir, se cambia la variable t por $a + b - t$ en las ecuaciones de $\vec{\sigma}$.

Ejemplo 3.6. Dado el camino $\vec{\sigma} : [0,2] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (t,\, t^2+1)$, vamos a obtener una parametrización que invierta la orientación.

Solución. La traza de este camino se encuentra sobre la parábola $y = x^2+1$. El punto inicial de este camino es $\vec{\sigma}(0) = (0,1)$ y el punto final es $\vec{\sigma}(2) = (2,5)$. La parametrización de la misma curva recorrida en sentido opuesto será $\vec{\rho} : [0,2] \to \mathbb{R}^2$, donde

$$\vec{\rho} = \vec{\sigma}(h(t)) = \vec{\sigma}(2-t) = (2-t,\, (2-t)^2+1).$$



Curvas con orientación inversa.

Observamos que la segunda coordenada es el cuadrado de la primera coordenada más uno, por tanto estamos sobre la parábola y que el punto inicial es $\vec{\rho}(0) = (2,5)$ y el final es $\vec{\rho}(2) = (0,1)$. ■

Una curva admite diferentes parametrizaciones ya que diferentes caminos pueden definir una misma curva y nos planteamos en qué casos se trata de reparametrizaciones de un mismo camino o no. Los siguientes ejemplos nos serán de utilidad para entender esta idea.

Ejemplo 3.7. Comprobemos que el camino $\vec{\sigma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (t, t^2)$ y el camino $\vec{\mu} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, son caminos opuestos.

Solución. El camino $\vec{\sigma}$ y el camino $\vec{\mu}$ definen la misma curva, la porción de parábola $y = x^2$ con extremos en $(0,0)$ y $(1,1)$; puesto que $\vec{\mu} = \vec{\sigma}(1-t)$ se tiene que $\vec{\mu}$ es una reparametrización de $\vec{\sigma}$, de hecho $\vec{\mu}$ es el camino opuesto a $\vec{\sigma}$.

Ejemplo 3.8. Veamos que el camino $\vec{\sigma} : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (-\sin(\frac{t}{2}), \cos(\frac{t}{2}))$ y el camino $\vec{\mu} : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\mu}(t) = (-\cos(\frac{t^2}{\pi}), \sin(\frac{t^2}{\pi}))$, definen la misma curva pero el camino $\vec{\mu}$ no es una reparametrización del camino $\vec{\sigma}$.

Solución. El camino $\vec{\sigma}$ y el camino $\vec{\mu}$ definen la semicircunferencia $y = \sqrt{1-x^2}$. Pero el camino $\vec{\sigma}$ recorre la curva una vez en sentido antihorario desde el punto inicial $(1,0)$ hasta el punto final $(-1,0)$ mientras que el camino $\vec{\mu}$ recorre dos veces la curva, en sentido antihorario de ida desde $(1,0)$ hasta $(-1,0)$, allí se produce una parada anulándose $\vec{\mu}'$, y vuelve desde $(-1,0)$ hasta $(1,0)$ en sentido horario. El camino $\vec{\mu}$ no es una reparametrización del camino $\vec{\sigma}$.

Ejemplo 3.9. Veamos que el camino $\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t)$ y el camino $\vec{\mu} : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\mu}(t) = (\cos t, \sin t)$, definen la misma curva pero $\vec{\mu}$ no es una reparametrización del camino $\vec{\sigma}$.

Solución. El camino $\vec{\sigma}$ y el camino $\vec{\mu}$ definen la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Pero el camino $\vec{\sigma}$ recorre la curva una vez y el camino $\vec{\mu}$ la recorre dos veces. El camino $\vec{\mu}$ no es una reparametrización del camino $\vec{\sigma}$.

Ejercicio 3.2. Obtén una reparametrización de

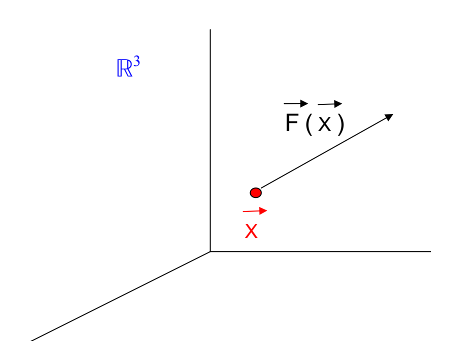
$$\vec{\sigma} : [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ \ \vec{\sigma}(t) = (t, t^2 + 2)$$

que invierta la orientación. (Solución: $\mu(t) = (1 - t, t^2 - 2t + 3)$, $-1 \leq t \leq 2$).

Se llama campo vectorial a una función

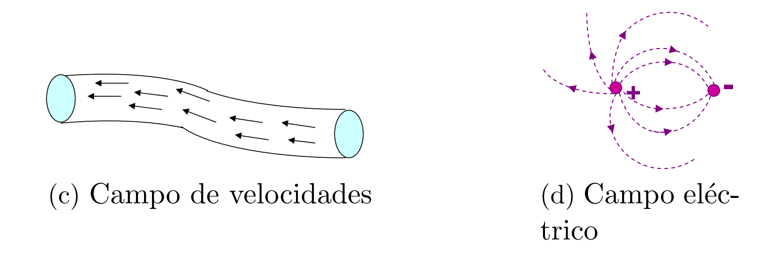
$$\begin{array}{lcl} \vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \vec{x} = (x_1, ..., x_n) & \longrightarrow & \vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), ..., F_1(\vec{x})) \end{array}$$

que a cada vector $\vec{x} = (x_1, ..., x_n) \in U$ le asocia un vector $\vec{F}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$, de modo que podemos expresar su imagen como $\vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), ..., F_1(\vec{x}))$. Las funciones $F_i : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son las funciones coordenadas de $\vec{F}$.



Representación de un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$

Representaremos los campos vectoriales mediante flechas correspondientes a cada vector $\vec{F}(\vec{x})$ con punto inicial en $\vec{x}$. Este tipo de visualización es muy útil para representar campos de velocidades, campos de fuerzas, campos electrostáticos y otros. Por ejemplo, un fluido moviéndose por una tubería.



(c) Campo de velocidades (d) Campo eléctrico

Ejemplos de campos vectoriales.

Se llama campo escalar a una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que a cada vector $\vec{x} = (x_1, ..., x_n) \in A$ le asocia un valor escalar,

$$\begin{array}{lcl} f : U \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{x} = (x_1, ..., x_n) & \longrightarrow & f(\vec{x}). \end{array}$$

Este tipo de campos nos permite representar matemáticamente la temperatura o la densidad en cada punto de un alambre o de una lámina, la presión dentro de un fluido, el potencial electrostático, etc.

3.1.2. Integrales de camino

Para motivar la necesidad de las integrales de funciones escalares sobre una curva planteamos el siguiente ejemplo, cuya resolución nos lleva al concepto de integral de camino.

Queremos calcular la masa de un alambre l conocida su densidad lineal (en gr/cm) en cada punto, dada por $\rho(\vec{p})$, siendo el alambre la imagen de un camino (regular, simple, de clase $\mathcal{C}^1$), $\vec{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$).

Si la densidad es constante, ρ_0, el problema es inmediato, la masa es el resultado de multiplicar la densidad por la longitud de $\vec{\sigma}$:

$$M = \rho_0\, l(\vec{\sigma}) = \rho_0 \int_a^b \|\vec{\sigma}'(t)\|\, dt.$$

Si la densidad es variable seguimos los pasos siguientes:

- Tomamos una partición regular P del intervalo $[a, b]$,

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b.$$

- A esta partición le corresponde una partición en el alambre l,

$$\vec{p}_0 < \vec{p}_1 < ... < \vec{p}_n$$

donde $\vec{p}_i = \vec{\sigma}(t_i) \in l$ (ver Figura 3.1).

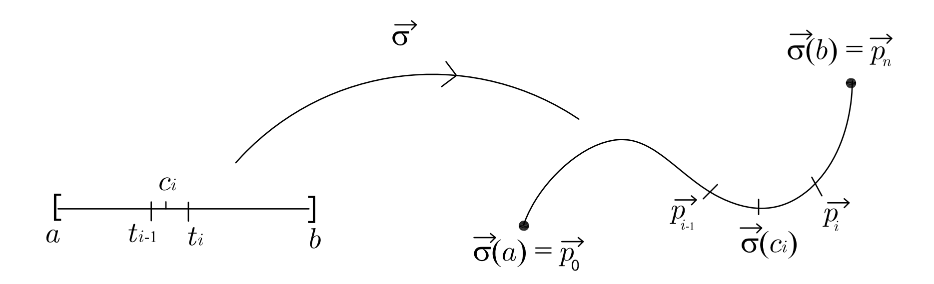


Figura 3.1: Partición del alambre

- En cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ tomamos un punto arbitrario c_i de modo que $\vec{\sigma}(c_i) \in [\vec{p}_{i-1}, \vec{p}_i]$.
- La masa del trozo de alambre entre $\vec{p}_{i-1}$ y $\vec{p}_i$ es aproximadamente la densidad en el punto $\vec{\sigma}(c_i)$ multiplicada por la longitud del alambre entre dichos puntos $\vec{p}_{i-1}$ y $\vec{p}_i$,

$$\Delta M_i \simeq \rho(\vec{\sigma}(c_i)) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt.$$

- Aplicando el teorema del valor medio a la integral que nos aparece en esta expresión, podemos escribir

$$\Delta M_i \simeq \rho(\vec{\sigma}(c_i)) \|\vec{\sigma}'(c_i)\| \, (t_i - t_{i-1}).$$

- Así, podemos aproximar la masa total del alambre mediante la suma

$$M_l \simeq \sum_{i=1}^{n} \Delta M_i, \quad \text{por tanto:} \quad M_l \simeq \sum_{i=1}^{n} \rho(\vec{\sigma}(c_i)) \|\vec{\sigma}'(c_i)\| \, (t_i - t_{i-1}).$$

Esta es una suma de Riemann para la función

$$\phi : [a, b] \to \mathbb{R}, \;\; \phi(t) = \rho(\vec{\sigma}(t)) \|\vec{\sigma}'(t)\|;$$

así, tomando límite cuando $n \to \infty$, obtenemos

$$M_l = \int_a^b \rho(\vec{\sigma}(t)) \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt.$$

■ **Definición 3.1.** Dada $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función real continua definida en un abierto U de $\mathbb{R}^n$ y dado $\vec{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ camino de clase $\mathcal{C}^1$, con $\vec{\sigma}([a, b]) \subset U$, se define la **integral de camino** de la función f a lo largo del camino $\vec{\sigma}$ como:

$$\int_{\vec{\sigma}} f ds = \int_a^b f(\vec{\sigma}(t)) \, \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt.$$

Esta definición también es válida para caminos $\mathcal{C}^1$ a trozos; en este caso:

$$\int_{\vec{\sigma}} f \, ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{\vec{\sigma}_i} f \, ds$$

donde $\vec{\sigma}_i$ corresponde a cada trozo $\mathcal{C}^1$ del camino.

Si integramos la función constante 1, entonces:

$$\int_{\vec{\sigma}} f \, ds = \int_a^b \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt = \text{longitud de la curva } \vec{\sigma}.$$

⬢ **Ejemplo 3.10.** (a) Calculemos la integral de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = xy$ a lo largo del camino $\vec{\sigma} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (t, t^2)$.
(b) Calculemos la integral de la misma función a lo largo del camino $\vec{\mu} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\mu}(t) = (1 - t, (1 - t)^2)$.

Solución.
(a) Puesto que $\vec{\sigma}'(t) = (1, 2t)$, entonces $\|\vec{\sigma}'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$, por tanto:

$$\int_{\vec{\sigma}} f\, ds = \int_0^1 f(t, t^2)\, \|\vec{\sigma}'(t)\|\, dt = \int_0^1 t^3\sqrt{1+4t^2}\, dt = (\text{cambio: } u^2 = 1+4t^2)$$

$$= \frac{1}{16}\int_1^{\sqrt{5}} (u^4 - u^2)\, du = \frac{1}{16}\left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right]_1^{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120}.$$

(b) Observemos que este camino es el opuesto del camino anterior, es decir, recorre la misma imagen pero en sentido opuesto. Su parametrización es:

$$\vec{\mu}'(t) = (-1, -2(1-t)),$$

entonces

$$\|\vec{\mu}'(t)\| = \sqrt{1+4(1-t)^2},$$

por tanto:

$$\int_{\vec{\mu}} f\, ds = \int_0^1 f(1-t, (1-t)^2)\, \|\vec{\mu}'(t)\|\, dt = \int_0^1 (1-t)^3\sqrt{1+4(1-t)^2}\, dt$$

haciendo el cambio $u = 1-t$, obtenemos:

$$= \int_0^1 u^3\sqrt{1+4u^2}\, du = \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120},$$

puesto que se obtiene la misma integral que en el ejemplo anterior. ■

■ **Nota 3.2.** Como hemos visto, la integral no varía al cambiar la orientación del camino.

⬣ **Ejercicio 3.3.** (a) Calcula la integral de camino de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2+y^2$ a lo largo del camino $\vec{\sigma} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (-\sin(\frac{t}{2}), \cos(\frac{t}{2}))$. (Solución: π).

(b) Con la misma función del apartado anterior, calcula la integral de trayectoria a lo largo del camino $\vec{\mu} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\mu}(t) = (-\cos(\frac{t^2}{\pi}), \sin(\frac{t^2}{\pi}))$. (Solución: 2π).

■ **Nota 3.3.** En el ejercicio anterior, el camino $\vec{\mu}$ no es una reparametrización del camino $\vec{\sigma}$, pero sí tiene la misma traza que $\vec{\sigma}$, aunque la traza es recorrida dos veces (como se ha visto en el Ejemplo 3.8). Podemos observar que el resultado de la integral de f a lo largo de $\vec{\mu}$ es el doble que a lo largo del camino $\vec{\sigma}$. Ésta será otra propiedad de las integrales de camino, este tipo de integrales son acumulativas.

3.1.3. Propiedades de las integrales de camino

(1) Linealidad. Sean $f,\, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones continuas y $\vec{\sigma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un camino de clase $\mathcal{C}^1$, entonces:

$$\int_{\vec{\sigma}} (\alpha f + \beta g)\, ds = \alpha \int_{\vec{\sigma}} f\, ds + \beta \int_{\vec{\sigma}} g\, ds,$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(2) La integral a lo largo de una trayectoria es invariante bajo reparametrizaciones de ésta:

Dada $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua y $\vec{\sigma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1$ con $\vec{\sigma}\,([a,b]) \subseteq U$. Si $\vec{\mu} : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ es una reparametrización de $\vec{\sigma}$, entonces:

$$\int_{\vec{\sigma}} f\, ds = \int_{\vec{\mu}} f\, ds.$$

(3) Las integrales de camino tienen carácter acumulativo:

Si $\vec{\sigma}$ es una camino $\mathcal{C}^1$ que recorre su traza de manera inyectiva y $\vec{\mu}$ es un camino que la recorre n veces, del punto inicial al final y de regreso al inicial y así sucesivamente, entonces:

$$\int_{\vec{\mu}} f\, ds = n \int_{\vec{\sigma}} f\, ds.$$

3.1.4. Aplicaciones de las integrales de camino

1. Cálculo de masas.

Como ya se ha visto, la masa de un alambre con densidad variable se obtiene como la integral de la función densidad sobre la curva que determina el alambre:

$$M = \int_{\vec{\sigma}} \rho\, ds.$$

Ejemplo 3.11. Calculemos la masa total de un alambre cuya forma es la de la imagen de una hélice $\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, si la densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de la distancia del punto al origen, valiendo 1 gr/cm en el punto inicial $\vec{\sigma}(0) = (1, 0, 0)$.

Solución. La densidad en cada punto viene dada por $\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$. Puesto que en el punto inicial $(1, 0, 0)$ vale 1, entonces:

$$1 = k(1 + 0 + 0)$$

y se tiene que $k = 1$ y la función densidad es $\rho(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)$. Por tanto, la masa total del alambre vendrá dada por:

$$\begin{aligned} M_T &= \int_{\vec{\sigma}} \rho\, ds = \int_0^{2\pi} \rho(\vec{\sigma}(t))\, \|\vec{\sigma}\,'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2)\, \sqrt{2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + t^2)\, \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2} \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}(2\pi + \frac{8\pi^3}{3})\ gr. \ \blacksquare \end{aligned}$$

⬢ **Ejercicio 3.4.** Calcula la masa total de una alambre cuya forma es la del cuadrado $|x| + |y| = 1$ y la densidad en cada punto del alambre es igual al cuadrado de la abcisa del punto. (Solución: $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ u.m.).

2. Cálculo de promedios.

El valor promedio f_p de una función escalar f en una curva, imagen del camino $\vec{\sigma}$, viene dado por:

$$f_p = \frac{\int_{\vec{\sigma}} f\, ds}{l_{\vec{\sigma}}} = \frac{\int_{\vec{\sigma}} f\, ds}{\int_{\vec{\sigma}} ds}.$$

⬢ **Ejemplo 3.12.** Hallemos la densidad promedio del alambre del Ejemplo 3.11.

Solución.

$$\bar{\rho} = \frac{\int_{\vec{\sigma}} \rho\, ds}{l_{\vec{\sigma}}} = \frac{M_T}{\int_0^{2\pi} \|\vec{\sigma}'(t)\|\, dt} = \frac{\sqrt{2}(2\pi + \frac{8\pi^3}{3})}{\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt}$$

$$= \frac{2\pi + \frac{8\pi^3}{3}}{2\pi} = 1 + \frac{4\pi^2}{3}\ gr/cm. \blacksquare$$

⬢ **Ejercicio 3.5.** Consideremos la función $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ definida en $U = \{(x, y)/x^2 + y^2 \leq R^2\} \subset \mathbb{R}^2$. Sea $\vec{\sigma} : [-R, R] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (t, 0)$. Halla el promedio de f sobre la curva $\vec{\sigma}$. (Solución: $\frac{\pi R}{4}$).

3. Centros de masa y momentos de inercia.

Para una curva plana, las coordenadas del centro de masa son:

$$\overline{x} = \frac{\int_{\vec{\sigma}} x\, \rho(x, y)\, ds}{\int_{\vec{\sigma}} \rho(x, y)\, ds}, \qquad \overline{y} = \frac{\int_{\vec{\sigma}} y\, \rho(x, y)\, ds}{\int_{\vec{\sigma}} \rho(x, y)\, ds}$$

y el momento de inercia respecto a un eje L, cuya distancia al punto (x, y) es $d(x, y)$ viene dado por:

$$I_L = \int_{\vec{\sigma}} (d(x, y))^2\ \rho(x, y)\, ds.$$

Si la curva está en $\mathbb{R}^3$, las fórmulas son análogas con función de densidad $\rho(x, y, z)$.

⬢ **Ejemplo 3.13.** Calculemos el centro de masa de un alambre homogéneo en forma de semicircunferencia ($y = \sqrt{r^2 - x^2}$).

Solución. Un camino cuya traza sea esta semicircunferencia es $\vec{\sigma} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (r \cos t, r \sin t)$. Por tanto, $\vec{\sigma}'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$ y $\|\vec{\sigma}'(t)\| = r$. Puesto que el alambre es homogéneo tiene densidad constante ρ_0 y se obtiene, por

simetría, que la coordenada x del centro de masa es $\bar{x} = 0$. La coordenada $\bar{y}$ viene dada por:

$$\bar{y} = \frac{\int_{\vec{\sigma}} y\,\rho_0\,ds}{\int_{\vec{\sigma}} \rho_0\,ds} = \frac{\int_0^{\pi} r\,\sin t\,\rho_0\|\vec{\sigma}'(t)\|\,dt}{\int_0^{\pi} \rho_0\|\vec{\sigma}'(t)\|\,dt} = \frac{\int_0^{\pi} r\,\sin t\,r\,dt}{l_{\vec{\sigma}}} = \frac{r^2\,[-\cos t]_0^{\pi}}{\pi\,r} = \frac{2r}{\pi}.$$

Por tanto, las coordenadas del centro de masa son $(0, \dfrac{2r}{\pi})$. ■

Ejercicio 3.6. Calcula el momento de inercia respecto del eje Z del alambre cuya forma está dada por la curva el segmento de parábola que va del punto $(0,0,0)$ al punto $(1,1,1)$ situada en el plano $y = x$ si la densidad en cada punto es $\rho(x,y,z) = \dfrac{x}{z}$. (Solución: $\sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{2}$).

4. Áreas laterales.

Cuando el camino describe una curva plana ($\vec{\sigma} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$) y f es una función de dos variables con valores reales tal que $f(x,y) \geq 0$, la integral

$$\int_{\vec{\sigma}} f\,ds$$

tiene una interpretación geométrica como "área lateral de una valla", cuya base es la curva imagen de $\vec{\sigma}$ y la altura en cada punto es $f(x,y)$ si recorre sólo una vez la imagen de $\vec{\sigma}$ (ver Figura 3.2).

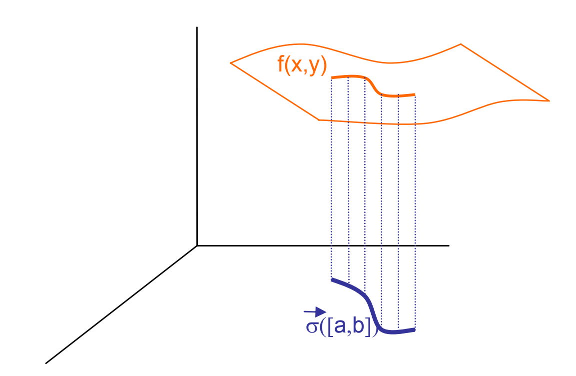
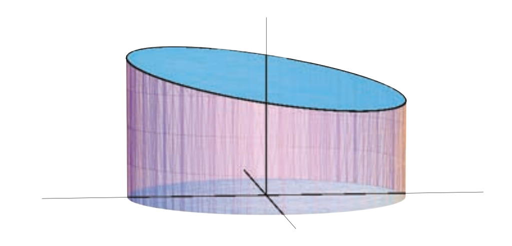


Figura 3.2: Valla de base $\vec{\sigma}([a,b])$ y altura $f(x,y)$.

Ejemplo 3.14. Calculemos el área de la superficie que se obtiene al cortar el cilindro $x^2 + y^2 = 7$ por los planos $z = 0$ y $x - y + z = 10$.



Área lateral.

Solución. Podemos calcular el área mediante una integral de camino,

$$A = \int_C f\, ds$$

donde la función a integrar, correspondiente a la altura en cada punto, es $f(x, y) = z = 10 - x + y$ y la curva C es la intersección entre el cilindro y el plano $z = 0$, es decir, $x^2 + y^2 = 7$, que podemos parametrizar del siguiente modo:

$$\vec{\sigma}(t) = (\sqrt{7}\cos t, \sqrt{7}\sin t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Entonces:

$$A = \int_0^{2\pi} f(\vec{\sigma}(t))\, \|\vec{\sigma}'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} (10 - \sqrt{7}\cos t + \sqrt{7}\sin t)\sqrt{7}dt$$
$$= \sqrt{7}\left[10t - \sqrt{7}\sin t - \sqrt{7}\cos t\right]_0^{2\pi} = 20\sqrt{7}\pi \text{ u.a.} \blacksquare$$

Ejercicio 3.7. Calcula el área de la valla lateral sobre el segmento de la recta $2x + y = 1$ situado en el primer cuadrante del plano XY y limitada por arriba por el paraboloide $z = 3 + x^2 + y^2$. (Solución: $\frac{41\sqrt{5}}{24}$ u.a.).

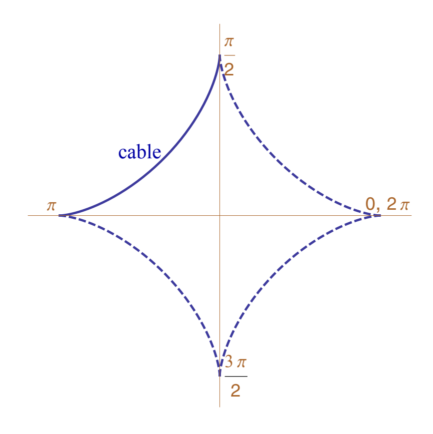
3.1.5. Ejercicios de la sección 3.1

1. Halla la integral de la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x\, z$ a lo largo del camino recto que va del punto $(1, 0, 0)$ al punto $(0, 0, 1)$. (Solución: $\frac{\sqrt{2}}{6}$).

2. Imaginemos un teatro cuya forma es la del tetraedro formado por los planos coordenados, el plano $z = \frac{b}{a}(a - x - y)$, $b > a > 0$, de modo que su base es un triángulo isósceles que tiene vértices en el origen y en los puntos $(a, 0, 0)$ y $(0, a, 0)$ y su altura es b. El escenario es circular y ocupa la región del plano XY dada por $\{(x, y)/x^2 + y^2 \leq r^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ donde $r < \sqrt{3}a/2$. Sobre el límite del escenario se levanta una cortina hasta el techo, ¿qué área cubrirá la cortina?. (Solución: $\frac{br}{a}(\frac{a\pi - 4r}{2})$ u.a.).

3. Calcula $\int_C f\, ds$ siendo $f(x, y, z) = 2y - \sqrt{x} - z^3$ y C el trozo de parábola $x = 2y^2$ en el plano $z = 3$ que va desde el punto $(0, 0, 3)$ a $(2, 1, 3)$ unido al segmento de recta que va del punto $(2, 1, 3)$ a $(1, 1, 3)$. (Solución: $-64{,}2404$).

4. Halla la temperatura T media de un cable que tiene forma de la parte del astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ que ocupa el segundo cuadrante, si la temperatura en cada punto del cable es $T(x, y) = x - y$ expresada en grados centígrados. (Solución: $\frac{6}{5}{}^oC$).



Astroide.

5. Calcula el área lateral de una valla que tiene la forma dada por la curva $y = 5 + x^2$, $x \in [1, 5]$ y siendo su altura $z = 3x + \dfrac{y}{x}$. (Solución: 375.595 u.a.).

6. Calcula el centro de masa de un alambre cuya forma está dada por $\vec{\sigma}(t) = \big(\sqrt{2}t, \sqrt{2}t, 5 - t\big)\big)$, $t \in [-1, 1]$ siendo la densidad en cada punto del alambre $\rho(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)/4$. (Solución: c.m. $\Big(-\frac{1}{4\sqrt{2}}, -\frac{1}{4\sqrt{2}}, \frac{41}{8}\Big)\big)$.

7. La base de una pieza del motor de una grúa tiene forma circular de radio 2 y su altura está dada por la función $z = 2 + \dfrac{1}{2}x^2$. Calcula el área de dicha pieza. (Solución: $\frac{97}{12}\pi$ u.a.).

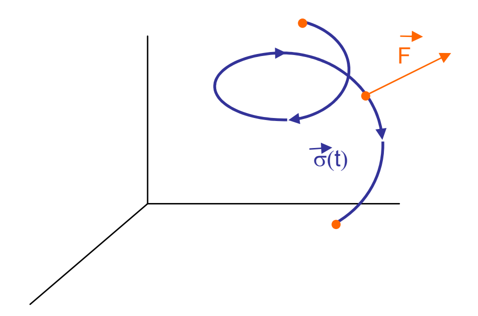
8. Calcula la masa total de un cable cuya forma viene dada por la curva $\vec{\sigma}(t) = (t - 1, 3t + 2)$, $t \in [-1, 1]$ y la densidad en cada punto del cable $\rho(x, y) = x + 3y$. (Solución: $10\sqrt{10}$ u.m.).

9. Calcula el centro de masa de un alambre cuya forma es la del trozo de elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ que ocupa el primer cuadrante, siendo la densidad en cada punto del alambre $\delta(x, y) = x\,y$. (Solución: $\frac{148}{7}$ u.m.).

3.2. INTEGRALES DE LÍNEA

Un concepto fundamental que nos llevará a una mejor comprensión de la integral de línea es el de trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ actuando sobre una partícula que se mueve describiendo una curva en el espacio, esto es, moviéndose a lo largo de la imagen de una trayectoria $\vec{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$.

Si el desplazamiento $\vec{d}$ se produce en línea recta y $\vec{F}$ es una fuerza constante en la dirección de $\vec{d}$, el trabajo realizado será $F{\cdot}d$; pero en general, si la trayectoria está curvada deberemos imaginarla aproximada por una sucesión de desplazamientos rectos infinitesimales. Supongamos que está aproximada por un número finito de desplazamientos rectos y razonemos de modo análogo al caso de la integral de camino.



Trayectoria curvada.

- Tomemos una partición de $[a, b]$ en n subintervalos iguales definida por $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, con $\Delta t = t_{i+1} - t_i$.

- Para un determinado intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, tenemos sobre la curva un arco que corresponde al intervalo $[\vec{\sigma}(t_i), \vec{\sigma}(t_{i+1})]$ (ver Figura 3.3).

- Sea $\Delta\vec{s}_i$ el vector que une $\vec{\sigma}(t_i)$ y $\vec{\sigma}(t_{i+1})$, es decir,

$$\Delta\vec{s}_i = \vec{\sigma}(t_{i+1}) - \vec{\sigma}(t_i).$$

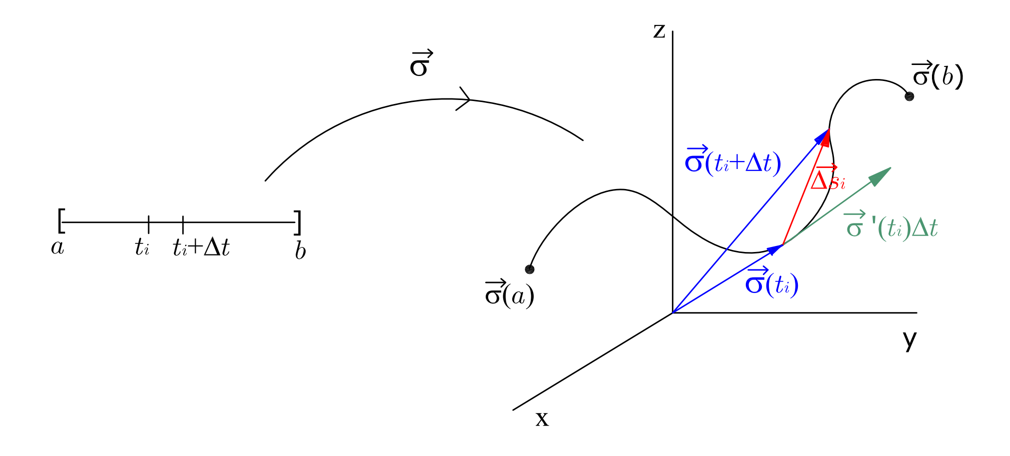


Figura 3.3: Aproximaciones en la integral de línea.

- Por definición de derivada:

$$\vec{\sigma}'(t_i) \approx \frac{\vec{\sigma}(t_i + \Delta t) - \vec{\sigma}(t_i)}{\Delta t}$$

por tanto, podemos aproximar:

$$\Delta\vec{s}_i \approx \vec{\sigma}'(t_i)\ \Delta t$$

- El trabajo realizado desde $\vec{\sigma}(t_i)$ a $\vec{\sigma}(t_{i+1})$ se puede aproximar por:

$$\vec{F}(\vec{\sigma}(t_i)) \cdot \Delta \vec{s}_i \approx \vec{F}(\vec{\sigma}(t_i)) \cdot \vec{\sigma}'(t_i)\, \Delta t.$$

- El trabajo W para ir desde $\vec{\sigma}(a)$ hasta $\vec{\sigma}(b)$ se puede aproximar por la suma:

$$W \approx \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(\vec{\sigma}(t_i)) \cdot \vec{\sigma}'(t_i)\, \Delta t.$$

- Tomando límite cuando $n \to \infty$, se tiene:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(\vec{\sigma}(t_i)) \cdot \vec{\sigma}'(t_i)\, \Delta t = \int_a^b \vec{F}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t)\, dt.$$

■ **Definición 3.2.** Dado un campo vectorial $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cuyas componentes son $\vec{F} = (F_1, ..., F_n)$, continuo sobre la trayectoria $\vec{\sigma}([a,b]) \subset U$ de clase $\mathcal{C}^1$, con $\vec{\sigma}([a,b]) \in U$, se define la **integral de línea** de $\vec{F}$ a lo largo de $\vec{\sigma}$, denotada por $\int_{\vec{\sigma}} \vec{F}$, $\int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\, d\vec{\sigma}$, o $\int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\, d\vec{s}$, como

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t)\, dt,$$

es decir,

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_a^b \left(F_1(\vec{\sigma}(t))\, \vec{\sigma}_1'(t) + ... + F_n(\vec{\sigma}(t))\, \vec{\sigma}_n'(t)\right)\, dt.$$

Cuando el camino $\vec{\sigma}$ es cerrado se suele utilizar la notación:

$$\oint_{\vec{\sigma}} \vec{F}\, d\vec{s}.$$

■ **Nota 3.4.** Como $\vec{F}$ es continuo (es decir, cada componente F_i es continua) y $\vec{\sigma}$ es de clase $\mathcal{C}^1$, entonces $\vec{F}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t)$ es una función continua (de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$) en $[a,b]$, por tanto existe la integral. También existe si dicho producto es $\mathcal{C}^1$ a trozos.

⬢ **Ejemplo 3.15.** Sea el camino $\vec{\sigma}(t) = (2\sin t, 2\cos t, t)$ donde $0 \le t \le 4\pi$. Sea $\vec{F}(x,y,z) = 2x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$. Calculemos la integral del campo $\vec{F}$ a lo largo del camino $\vec{\sigma}$.

Solución.

$$\begin{aligned}\int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\, d\vec{s} &= \int_0^{4\pi} \vec{F}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t)\, dt = \int_0^{4\pi} \vec{F}(2\sin t, 2\cos t, t)\, (2\cos t, -2\sin t, 1)\, dt \\ &= \int_0^{4\pi} (4\sin t, -2\cos t, t)\, (2\cos t, -2\sin t, 1)\, dt \\ &= \int_0^{4\pi} (8\sin t\cos t + 4\cos t\sin t + t)\, dt \\ &= \int_0^{4\pi} (12\sin t\cos t + t)\, dt = \left[6\sin^2 t + \frac{t^2}{2}\right]_0^{4\pi} = 8\pi^2. \blacksquare\end{aligned}$$

Las integrales de línea también se pueden expresar de la forma:

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} d\vec{s} = \int_a^b F_1 dx_1 + ... + F_n dx_n,$$

donde F_1, F_2,..., F_n son las componentes del campo vectorial $\vec{F}$. A la expresión $F_1 dx_1 + ... + F_n dx_n$ se le llama forma diferencial.

Como consecuencia de la definición, la integral de una forma diferencial verifica:

$$\int_{\vec{\sigma}} F_1 dx_1 + ... + F_n dx_n = \int_a^b (F_1 \frac{dx_1}{dt} + ... + F_n \frac{dx_n}{dt}) dt = \int_{\vec{\sigma}} \vec{F} d\vec{s}$$

donde $\vec{\sigma}$ es el camino $\vec{\sigma}(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, $a \leq t \leq b$.

Ejemplo 3.16. Calculemos

$$\int_{\vec{\sigma}} (x^2+1)dx + e^{2x}\, dy + 2z\, dz$$

donde $\vec{\sigma} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{\sigma}(t) = (t, 2t, e^t)$.

Solución.

$$\int_{\vec{\sigma}} (x^2+1)dx + e^{2x}\, dy + 2z\, dz = \int_0^1 (t^2+1)dt + e^{2t}\, 2dt + 2e^t\, e^t\, dt$$

$$= \int_0^1 (t^2 + 1 + 4e^{2t})dt = \left[\frac{t^3}{3} + t + 2e^{2t}\right]_0^1 = 2e^2 - \frac{2}{3}. \blacksquare$$

Nota 3.5. Si un campo de fuerzas $\vec{F}$ es normal a una curva en todo punto, se tiene que $\vec{F}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t) = 0$, siendo $\vec{\sigma}$ una parametrización de dicha curva; por tanto, el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ a lo largo de dicha curva es cero.

Ejemplo 3.17. Sea $\vec{F}$ el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y,z) = x^3\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ que es normal en cada punto a la circunferencia de radio a en el plano YZ parametrizada por:

$$x = 0, \quad y = a\cos t, \quad z = a\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Comprobemos que el trabajo realizado por $\vec{F}$ es cero.

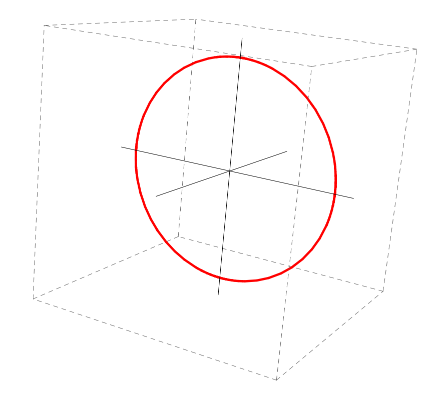


Figura 3.4: Circunferencia en el plano YZ.

Solución. El trabajo viene dado por:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(0, a\cos t, a\sin t)\cdot(0, -a\sin t, a\cot s)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (0, a\cos t, a\sin t)\cdot(0, -a\sin t, a\cot t)\, dt = \int_0^{2\pi} 0\, dt = 0, \end{aligned}$$

es decir, $\vec{F}$ no realiza trabajo sobre una partícula que se mueva a lo largo de la curva $\vec{\sigma}$. ■

Propiedades de las integrales de línea

(1) Linealidad. Sean $\vec{F}$,$\vec{G} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ campos continuos y $\vec{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1$ con $\vec{\sigma}([a, b]) \subset U$, entonces:

$$\int_{\vec{\sigma}} (\alpha\vec{F} + \beta\vec{G}) d\vec{s} = \alpha \int_{\vec{\sigma}} \vec{F} d\vec{s} + \beta \int_{\vec{\sigma}} \vec{G} d\vec{s}.$$

(2) Teorema. Sea $\vec{F}$: $U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo y sea $\vec{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un camino de clase $\mathcal{C}^1$ con $\vec{\sigma}([a, b]) \subset U$.

Sea $h : [c, d] \to [a, b]$ una función sobreyectiva, $h([c, d]) = [a, b]$, de clase $\mathcal{C}^1$ y sea $\vec{\mu} : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ el camino $\vec{\mu} = \vec{\sigma} \circ h$.

- Si $h(c) = a$ y $h(d) = b$, entonces $\int_{\vec{\mu}} \vec{F} d\vec{s} = \int_{\vec{\sigma}} \vec{F} d\vec{s}$.
- Si $h(c) = b$ y $h(d) = a$, entonces $\int_{\vec{\mu}} \vec{F} d\vec{s} = -\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} d\vec{s}$.

En particular, se verifica que si $\vec{\mu}$ es una reparametrización de $\vec{\sigma}$, entonces:

- $\int_{\vec{\mu}} \vec{F} d\vec{s} = \int_{\vec{\sigma}} \vec{F} d\vec{s}$ si $\vec{\mu}$ conserva la orientación.
- $\int_{\vec{\mu}} \vec{F} d\vec{s} = -\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} d\vec{s}$ si $\vec{\mu}$ invierte la orientación.

(3) Aditividad. Si $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2$, entonces $\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} d\vec{s} = \int_{\vec{\sigma}_1} \vec{F} d\vec{s} + \int_{\vec{\sigma}_2} \vec{F} d\vec{s}$.

■ **Nota 3.6.** Vimos que la integral de camino era acumulativa. Esto no ocurre con las integrales de línea: salvo signo, la integral es la misma para cualquier camino que recorra la misma traza, aunque haya retrocesos; en la propiedad (2) se incluyen composiciones con funciones h de modo que el resultado $\vec{\rho}$ pueda no ser una reparametrización. Podría darse el caso de que $\vec{\rho}$ recorriera la misma traza que $\vec{\sigma}$ sufriendo "regresos" a lo largo de su trayecto, no obstante, el valor de la integral sería el mismo, es decir, el valor de la integral de línea de un campo vectorial no es acumulativo. Por tanto, tiene sentido hablar de integral de un campo $\vec{F}$ sobre una curva, podremos entonces definir:

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{s} = \int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\, d\vec{s},$$

siendo $\vec{\sigma}$ cualquier parametrización que preserve la orientación de la curva C.

⬢ **Ejemplo 3.18.** Sea $\vec{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ el campo vectorial $\vec{F}(x,y)=(x+y,\ y)$ y $\vec{\sigma}:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t)=(t,t^2)$. Calculemos la integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo de $\vec{\sigma}$.

Solución.

$$\int_{\vec{\sigma}}\vec{F}\,d\vec{s}=\int_0^1(t+t^2,t^2)(1,2t)\,dt=\int_0^1(t+t^2+2t^3)\,dt$$

$$=\left[\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{4}{3}.\ \blacksquare$$

⬢ **Ejemplo 3.19.** Con el mismo campo que el ejemplo anterior, hallemos su integral a lo largo del camino $\vec{\mu}:[0,k^{-1}]\to\mathbb{R}^2$, $\vec{\mu}(t)=(kt,k^2t^2)$, $k>0$.

Solución.

$$\int_{\vec{\mu}}\vec{F}\,d\vec{s}=\int_0^{k^{-1}}(kt+k^2t^2,k^2t^2)(k,2k^2t)\,dt=\int_0^{k^{-1}}((kt+k^2t^2)k+k^2t^22k^2t)\,dt$$

$$=\int_0^{k^{-1}}(k^2t+k^3t^2+2k^4t^3)\,dt=\left[\frac{k^2t^2}{2}+\frac{k^3t^3}{3}+\frac{k^4t^4}{2}\right]_0^{k^{-1}}=\frac{4}{3}.$$

Observemos que $\vec{\mu}$ es una reparametrización de $\vec{\sigma}$, $\vec{\mu}=\vec{\sigma}\circ h$, con $h(t)=kt$, y además conserva la orientación, $h'(t)=k>0$. En este caso, hemos obtenido que

$$\int_{\vec{\sigma}}\vec{F}\,d\vec{s}=\int_{\vec{\mu}}\vec{F}\,d\vec{s}.\ \blacksquare$$

⬢ **Ejemplo 3.20.** Integremos ahora el mismo campo vectorial a lo largo del camino inverso de $\vec{\sigma}$. ($\vec{\rho}=\vec{\sigma}\circ h$, con $h(t)=1-t$, es decir, $\vec{\rho}:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, $\vec{\rho}(t)=(1-t,(1-t)^2)$.

Solución.

$$\int_{\vec{\rho}}\vec{F}\,d\vec{s}=\int_0^1\big(((1-t)+(1-t)^2)(-1)+(1-t)^22(1-t)(-1)\big)\ dt$$

$$=\int_0^1(-1)((1-t)+(1-t)^2+2(1-t)^3)\,dt$$

$$=\left[\frac{(1-t)^2}{2}+\frac{(1-t)^3}{3}+\frac{(1-t)^4}{2}\right]_0^1=-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{4}{3}.$$

En este caso, $\vec{\rho}$ es una reparametrización de $\vec{\sigma}$ que invierte la orientación y hemos obtenido que

$$\int_{\vec{\sigma}}\vec{F}\,d\vec{s}=-\int_{\vec{\rho}}\vec{F}\,d\vec{s}.\ \blacksquare$$

Por otra parte, la propiedad (3) nos permite definir la integral de línea para caminos de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. Si $\vec{\sigma}=\vec{\sigma}_1+...+\vec{\sigma}_k$ donde cada $\vec{\sigma}_i$ es de clase $\mathcal{C}^1$, $i=1...k$, entonces se define:

$$\int_{\vec{\sigma}}\vec{F}\,d\vec{s}=\sum_{i=1}^{k}\int_{\vec{\sigma}_i}\vec{F}\,d\vec{s}.$$

Es obvio que si C^- es la misma curva que C pero con orientación opuesta, entonces $\int_C \vec{F} d\vec{s} = -\int_{C^-} \vec{F} d\vec{s}$. Además, si C está formada por varias curvas (orientadas) $C = C_1 + ... + C_n$, entonces $\int_C \vec{F} d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{F} d\vec{s} + ... + \int_{C_n} \vec{F} d\vec{s}$, propiedad que resulta muy interesante, ya que podemos parametrizar cada trozo C_i por separado convenientemente y luego sumar la integrales.

Ejemplo 3.21. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo $\vec{F}(x, y) = (xy, x^2 y)$. Consideremos el camino $\vec{\sigma} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (t, |t|)$. Calculemos $\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} d\vec{s}$.

Solución. En este caso, el camino $\vec{\sigma}$ no es de clase $\mathcal{C}^1$, pero sí es $\mathcal{C}^1$ a trozos pues podemos escribir $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2$, donde $\vec{\sigma}_1 : [-1, 0] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (t, -t)$ y $\vec{\sigma}_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (t, t)$ son ambas de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces,

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_{\vec{\sigma}_1} \vec{F}\, d\vec{s} + \int_{\vec{\sigma}_2} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_{-1}^{0} (-t^2, t^2(-t))(1, -1)\, dt + \int_0^1 (t^2, t^3)(1, 1)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{0} (-t^2 + t^3)\, dt + \int_0^1 (t^2 + t^3)\, dt = \left[\frac{-t^3}{3} + \frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 0. \blacksquare$$

Ejercicio 3.8. Calcula la integral de línea

$$\int_C 2x\, y^3\, dx + (y^2 + x\, z) dy + x\, y\, dz,$$

siendo C la curva obtenida al intersectar las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$. (Solución: 3π).

Ejercicio 3.9. Con el mismo campo vectorial del Ejercicio 3.8, halla su integral a lo largo de la misma curva con la parametrización

$$\vec{\mu}(t) = (\sqrt{3} \cos 3t, \sqrt{3} \sin 3t, 1)$$

donde $t \in [0, 2\pi/3]$.

Ejercicio 3.10. Integra ahora el mismo campo vectorial a lo largo del camino inverso de $\vec{\sigma}$ del ejercicio 3.8, es decir, $\vec{\rho} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\rho}(t) = (\sqrt{3} \sin t, \sqrt{3} \cos t, 1)$.

3.2.1. Independencia del camino. Campos conservativos

Existe un tipo de campos vectoriales para los cuales el valor de la integral de línea es independiente de la curva seguida y sólo depende del punto inicial y del punto final. Dichos campos se denominan *campos conservativos* y son de especial interés por sus aplicaciones en Mecánica de Fluidos, Mecánica Clásica y otros ámbitos relacionados.

Algunos ejemplos de campos conservativos son:

- Campo gravitatorio en el que el trabajo efectuado contra la gravedad para mover un objeto de un punto a otro no depende del camino elegido.
- Campos de fuerzas elásticas.
- Campos eléctricos.

Sin embargo, cuando consideramos el trabajo necesario para empujar una caja por el suelo, éste sí que depende de la trayectoria que recorremos debido a las fuerzas de fricción. Luego, son campos no conservativos aquellos en los que aparecen fuerzas de rozamiento.

Definición 3.3. Un campo vectorial $\vec{F}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un **campo gradiente** si $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ para alguna función $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Nota 3.7. Recordemos que $\vec{\nabla} f$ es el vector gradiente de la función f y viene dado por:

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Así, si $\vec{F}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial gradiente, será de la forma:

$$\vec{F} = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}).$$

Ejemplo 3.22. Sea $f(x, y, z) = x\,y\,z + \sin x$. Si $\vec{F} = \vec{\nabla} f$, entonces $\vec{F}(x, y, z) = (yz + \cos x,\ xz,\ xy)$. ■

Recordemos que si las funciones $G, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son continuas y se verifica que $G'(x) = g(x)\ \forall x \in [a, b]$, es decir, G es una primitiva de g en $[a, b]$, entonces, por el teorema fundamental del cálculo integral:

$$\int_a^b g(x)dx = G(b) - G(a).$$

Así, el valor de la integral sólo depende del valor de G en los puntos extremos de $[a, b]$. Generalizando este resultado se tiene el siguiente teorema:

Teorema 3.1. Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ y sea $\vec{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. Entonces:

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{\nabla} f d\vec{s} = f(\vec{\sigma}(b)) - f(\vec{\sigma}(a)).$$

Demostración.

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{\nabla} f d\vec{s} = \int_a^b \vec{\nabla} f(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t)dt = \int_a^b (f \circ \vec{\sigma})'(t)dt =$$

$$= (f \circ \vec{\sigma})(b) - (f \circ \vec{\sigma})(a) = f(\vec{\sigma}(b)) - f(\vec{\sigma}(a)). \ ■$$

Por tanto, si el campo que queremos integrar es un campo vectorial gradiente ($\vec{F} = \vec{\nabla} f$) la integral se resuelve de un modo muy sencillo, evaluando f en los puntos final e inicial del camino $\vec{\sigma}$:

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} d\vec{s} = \int_{\vec{\sigma}} \vec{\nabla} f d\vec{s} = f(\vec{\sigma}(b)) - f(\vec{\sigma}(a)),$$

y la integral no depende del camino recorrido, sólo de los extremos.

■ **Teorema 3.2.** Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo de clase $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 0$) definido en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. $\vec{F}$ es el campo gradiente de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^{k+1}$, es decir,
$$\vec{F} = \vec{\nabla} f.$$
2. La integral $\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} d\vec{s}$ del campo vectorial $\vec{F}$ a lo largo de un camino $\vec{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ seccionalmente $\mathcal{C}^1$ y tal que $\vec{\sigma}([a, b]) \subset U$, depende únicamente del punto inicial $\vec{\sigma}(a)$ y final $\vec{\sigma}(b)$ del camino $\vec{\sigma}$. Por tanto, tiene sentido la notación:
$$\int_{\vec{p}}^{\vec{q}} \vec{F} d\vec{s},$$
donde $\vec{p} = \vec{\sigma}(a)$ y $\vec{q} = \vec{\sigma}(b)$.
3. La integral de línea del campo $\vec{F}$ a lo largo de cualquier camino cerrado $\vec{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ seccionalmente $\mathcal{C}^1$ y tal que $\vec{\sigma}([a, b]) \subset U$ es igual a cero,
$$\oint_{\vec{\sigma}} \vec{F} d\vec{s} = 0.$$

■ **Definición 3.4.** A un campo $\vec{F}$ que verifique alguna de las propiedades dadas en el teorema, y por tanto todas, se le llama **campo conservativo** y a la función f tal que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ se le llama **función potencial**.

⬢ **Ejemplo 3.23.** El campo $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (y\,z,\, x\,z,\, x\,y)$ es un campo conservativo pues la función $f(x, y, z) = x\,y\,z$ es una función potencial de $\vec{F}$.

Solución.

$$\vec{\nabla} f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (y\,z,\, x\,z,\, x\,y) = \vec{F}(x, y, z). \blacksquare$$

⬢ **Ejercicio 3.11.** Demuestra que el campo $\vec{F}(x, y) = (2x + y, -x + 4x\,y)$ no es conservativo.

El teorema no nos dice cuándo un campo es conservativo, sólo podemos saberlo si encontramos una función potencial. Veamos a continuación bajo qué condiciones podemos decir que un campo vectorial es conservativo.

Condición necesaria de campo vectorial conservativo

Tomemos un campo vectorial $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$,

$$\vec{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)),$$

donde $F_1, F_2 : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son de clase $\mathcal{C}^k$.

- Si $\vec{F}$ es conservativo entonces existe $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^{k+1}$ tal que

$$\vec{\nabla} f = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) = \vec{F}(x,y),$$

es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = F_1(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = F_2(x,y) \qquad \forall (x,y) \in U.$$

- Derivando la primera igualdad respecto de y y la segunda respecto de x, se tiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x},$$

puesto que f es, al menos, de clase $\mathcal{C}^2$, las derivadas segundas cruzadas de f coinciden,

$$\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}.$$

Por tanto, si $\vec{F}$ es un campo conservativo se verifica:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}.$$

Ejemplo 3.24. El campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^k, $k \geq 1$, $\vec{F}(x,y) = (x+y, y)$ no es conservativo pues

$$\frac{\partial}{\partial y}(x+y) \neq \frac{\partial}{\partial x}(y). \blacksquare$$

Consideremos ahora el caso general. Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo conservativo de clase $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$,

$$\vec{F}(x_1, ..., x_n) = (F_1(x_1, ..., x_n), ..., F_n(x_1, ..., x_n))$$

entonces, existe $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^{k+1}$ tal que

$$\vec{\nabla} f(x_1, ..., x_n) = \vec{F}(x_1, ..., x_n),$$

es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) = F_i(x_1, ..., x_n), \qquad i = 1, ..., n.$$

Derivando cada igualdad respecto de x_j $(i \neq j)$ obtenemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x, y) = \frac{\partial F_i(x, y)}{\partial x_j}, \qquad i, j = 1, ..., n, \qquad i \neq j,$$

intercambiando los papeles de i y j, obtenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x, y) = \frac{\partial F_j(x, y)}{\partial x_i}, \qquad i, j = 1, ..., n, \qquad i \neq j.$$

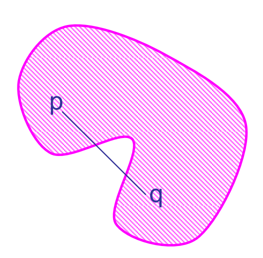
Puesto que f es al menos de clase $\mathcal{C}^2$, las derivadas segundas cruzadas de f coinciden, por tanto:

$$\frac{\partial F_i(x, y)}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j(x, y)}{\partial x_i}, \qquad 1 \leq i < j \leq n. \tag{3.1}$$

Por tanto, (3.1) es una condición necesaria para que un campo sea conservativo. Pero es condición necesaria y suficiente si U es un conjunto convexo.

■ **Definición 3.5.** Un conjunto U es **convexo** si dados dos puntos cualesquiera $\vec{p}, \vec{q} \in U$, entonces el segmento que los une está contenido en U, es decir,

$$[\vec{p}, \vec{q}] = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ \vec{x} = t\vec{q} + (1 - t)\vec{p}, \ 0 \leq t \leq 1\} \subseteq U.$$

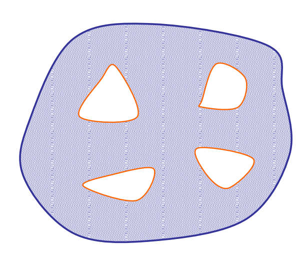


Conjunto no convexo.

⬢ **Ejemplo 3.25.** (1) Las bolas en $\mathbb{R}^n$ son conjuntos convexos.
(2) El espacio $\mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo.

■ **Nota 3.8.** Esta condición necesaria y suficiente se amplía si el campo está definido sobre un conjunto simplemente conexo. De modo intuitivo, un conjunto D del plano es simplemente conexo cuando no tiene agujeros. O también, un conjunto D del plano es simplemente conexo si su complementario respecto del plano es conexo.

Un conjunto abierto y conexo que no es simplemente conexo se llama múltiplemente conexo.



Conjunto múltiplemente conexo.

Cálculo de funciones potenciales.

Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F} = (M, N)$ un campo conservativo.

Una función potencial para $\vec{F}$ es una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{\nabla} f = (M, N)$, es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = N(x, y), \qquad \forall (x, y) \in U \tag{3.3}$$

Integrando en (3.2) respecto de x, se tiene:

$$f(x, y) = \int M(x, y)dx + \varphi(y) \tag{3.4}$$

donde $\varphi(y)$ es una función a determinar. Para ello, derivamos ahora esta expresión obtenida respecto de y e igualamos a (3.3):

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\int M(x, y)dx) + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Despejando $\varphi'(y)$ e integrando respecto de y, tenemos:

$$\varphi(y) = \int \left(N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}(\int M(x, y)dx) \right) dy.$$

La expresión obtenida para $\varphi(y)$ la sustituimos en (3.4) y obtenemos la función potencial f.

⬢ **Ejemplo 3.26.** Dado el campo $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (y^2, 2xy - e^y)$, comprobemos que es conservativo y halla una función potencial.

Solución. Comprobamos que

$$\frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} = 2y = \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x}$$

y además el campo $\vec{F}$ está definido en $\mathbb{R}^2$ que es un conjunto convexo, por tanto $\vec{F}$ es conservativo. La función potencial $f(x, y)$ que buscamos verifica:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = y^2$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2xy - e^y.$$

Comenzamos integrando en la primera condición:

$$f(x,y) = \int y^2 dx = xy^2 + \varphi(y). \tag{3.5}$$

Derivando parcialmente respecto de y :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2xy + \varphi'(y)$$

e igualando a la segunda condición:

$$2xy + \varphi'(y) = 2xy - e^y$$

por tanto,

$$\varphi'(y) = -e^y$$

de donde

$$\varphi(y) = -e^y$$

y, sustituyendo en (3.5), la función potencial es :

$$f(x,y) = xy^2 - e^y. \blacksquare$$

⬢ **Ejercicio 3.12.** Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x,y) = (2x \sin y, x^2 \cos y)$. Comprueba que es conservativo y halla una función potencial. (Solución: $f(x,y) = x^2 \sin y$).

Este método también se generaliza para campos en $\mathbb{R}^n$.

⬢ **Ejemplo 3.27.** Dado el campo $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x,y,z) = (3y^2z + ye^x, 6xyz + e^x + z, 3xy^2 + y)$, calculemos el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ para mover una partícula desde el punto $(0,0,0)$ hasta el punto $(1,-\pi,0)$.

Solución. Comprobamos en primer lugar que $\vec{F}$ es conservativo, de este modo el trabajo W realizado por este campo para mover una partícula desde el punto $(0,0,0)$ hasta el punto $(1,-\pi,0)$ es independiente del camino tomado.

Sean F_1, F_2 y F_3 las funciones coordenadas de $\vec{F}$. Entonces:

$$\frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial y} = 6yz + e^x = \frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial z} = 3y^2 = \frac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial z} = 6xy + 1 = \frac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial y}$$

Como $\vec{F}$ está definido en el convexo $\mathbb{R}^3$, se tiene que el campo es conservativo.

Para calcular el trabajo podemos elegir un camino sencillo que una estos dos puntos o bien hallar una función potencial y calcular la diferencia de dicha función en los extremos.

(a) La trayectoria más sencilla que une los puntos $\vec{p} = (0,0,0)$ y $\vec{q} = (1,-\pi,0)$ es el segmento $\vec{\rho}(t) = (1-t)\,\vec{p} + t\,\vec{q} = (t,-\pi\,t,0)$, $0 \leq t \leq 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} W &= \int_{\vec{\rho}} \vec{F}\,d\vec{s} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{\rho}(t))\,\vec{\rho}'(t)\,dt = \int_0^1 \vec{F}((t,-\pi\,t,0))\,(1,-\pi,0)\,dt \\ &= \int_0^1 (-\pi t e^t, e^t, 3\pi^2 t^3 - \pi t)\,(1,-\pi,0)\,dt = \int_0^1 (-\pi t e^t - \pi e^t)\,dt \\ &= -\pi \int_0^1 (te^t + e^t) dt = -\pi e. \end{aligned}$$

(b) Calculando una función potencial: buscamos una función $f(x,y,z)$ tal que

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 3y^2 z + ye^x, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 6xyz + e^x + z, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 3xy^2 + y. \tag{3.8}$$

Comencemos, por ejemplo, integrando en (3.6) respecto de x, entonces:

$$f(x,y,z) = \int (3y^2 z + ye^x)\,dx = 3xy^2 z + ye^x + \varphi(y,z).$$

Para hallar $\varphi(y,z)$ derivamos f respecto de y y respecto de z e igualamos a (3.7) y (3.8) respectivamente:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 6xyz + e^x + \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} = 6xyz + e^x + z,$$

de donde

$$\frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} = z, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 3xy^2 + \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial z} = 3xy^2 + y,$$

por tanto:

$$\frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial z} = y. \tag{3.10}$$

Repetimos ahora el proceso con las ecuaciones (3.9) y (3.10). Integrando en (3.9) respecto de y :

$$\varphi(y,z) = \int z\,dy = yz + \phi(z) \tag{3.11}$$

y derivando (3.11) respecto de z e igualando a (3.10):

$$\frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial z} = y + \phi'(z) = y,$$

de donde se tiene que $\phi'(z) = 0$ y por tanto, $\phi(z) =$ constante. Tomamos $\phi(z) = 0$. Sustituyendo las funciones obtenidas para ϕ y φ, se obtiene la función potencial:

$$f(x, y, z) = 3xy^2z + ye^x + yz.$$

Podemos ahora hallar el trabajo W mediante la función potencial:

$$W = f(1, -\pi, 0) - f(0, 0, 0) = -\pi e. \blacksquare$$

Ejercicio 3.13. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (3y^2z+ye^x, 6xyz+e^x, 3xy^2)$. (a) ¿Es conservativo? (b) Halla una función potencial. (c) Calcula $\int_{\vec{\mu}} \vec{F} d\vec{s}$, siendo $\vec{\mu}$ el camino $\vec{\mu} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ definido por $\vec{\mu}(t) = (\sin(t/2) + \cos(2t) - 1,$ $t\cos t,\ t^2 \sin t)$. (Solución: (a) Sí. (b) $f(x, y, z) = 3xy^2z + ye^x$; (c) $-\pi e$).

3.2.2. Ejercicios de la sección 3.2

1. Sea $\vec{F}(x, y) = (xy, x^2y)$ y el camino $\vec{\sigma}(t) = (t, |t|)$. Calcula $\int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\, d\vec{s}$. (Solución: 0).

2. Consideremos el campo $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (x+4y, ax+y)$ donde a es constante. Halla $\int_C \vec{F} d\vec{s}$, siendo C la curva: $C = \{(x, y) : |x|+|y| = 1\}$. (Solución: $2a - 8$).

3. Calcula la integral de línea del campo $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (2x + y, -x + 4xy)$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ recorrida (1 vez) en sentido antihorario. (Solución: -2π).

4. Halla el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = (y^2, -y, 3z)$ para mover una partícula a lo largo de la curva C, siendo C la intersección las superficies $x^2 + y^2 = 1$ y $2x + 6y - 3z = 6$ correspondiente al primer octante, recorrida en sentido antihorario. (Solución: $-\frac{23}{6}$ u.t.).

5. Calcula la integral del campo $\vec{F}(x, y, z) = (xy^3z, y^2+xz, xy)$ a lo largo de la curva C definida por la intersección las superficies $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ recorrida en sentido horario. (Solución: -8π).

6. Calcula $\int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\, d\vec{\sigma}$ siendo $\vec{F}(x, y, z) = (\sqrt{y}, 2x, 2z)$ y C la curva cerrada que resulta de la intersección de los cilindros parabólicos $y = x^2$, $y = 2 - x^2$ y el plano $z = 6$. (Sol: $\frac{16}{3} - \frac{\pi}{2}$).

7. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (e^x \cos y, -e^x \sin y, 2)$ que es conservativo. Halla una función potencial. (Solución: $f(x, y) = e^x \cos y + 2z$).

8. Calcula el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\vec{F}(x, y) = (2x \cos y, -x^2 \sin y)$$

para mover una partícula desde el punto $(0, 1)$ al punto $(1, 0)$. (Solución: -1 u.t.).

9. Halla el trabajo realizado por el campo de fuerzas:

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(2e^{2x+y} + 3x^2z, e^{2x+y} + z, x^3 + y + 2z\right)$$

para mover una partícula desde el punto $(0,0,0)$ al punto $(1,-2,2)$. (Solución: 2 u.t.).

10. Calcula el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\vec{F}(x,y) = (3x^2 + y, e^y + x)$$

para mover una partícula desde el punto $(0,1)$ al punto $(1,0)$. (Solución: $e-2$ u.t.).

11. Sea C el trozo de la curva intersección entre el cilindro $x^2+y^2=4$ y el plano $z=4-y$ situada en el primer octante. Calcula el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y,z)=(y,-x,x+z)$ para mover una partícula desde el punto $(2,0,4)$ hasta el punto $(0,2,2)$ a lo largo de C. (Solución: $-3(\pi+2)$ u.t.).

3.3. EL TEOREMA DE GREEN

El teorema de Green, uno de los resultados más importantes del cálculo vectorial, relaciona integrales de línea con integrales dobles, en particular establece la relación entre una integral de línea a lo largo de una curva cerrada simple C en $\mathbb{R}^2$, con una integral doble sobre la región encerrada por C.

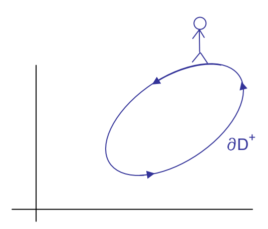
Las aplicaciones del teorema de Green aparecen en diversos ámbitos:

- Matemáticas: ecuaciones diferenciales, demostración del teorema de cambio de variables, etc.
- Física: teoría del potencial, termodinámica, electromagnetismo, campos conservativos, mecánica de fluidos, etc.
- Ingeniería: teoría de la circulación del ala de un avión, análisis del trabajo en los ciclos de un motor, etc.

Antes de enunciar el teorema definiremos qué se entiende por regiones compactas en $\mathbb{R}^2$, que son las regiones donde será válido el teorema y precisaremos cuándo la frontera de una región está orientada positivamente.

Recordemos que toda curva cerrada simple en el plano, o curva de Jordan, separa a éste en dos subconjuntos (abiertos, conexos y disjuntos), uno acotado llamado interior de C y otro no acotado llamado exterior de C, de los cuales la curva C es la frontera común.

■ **Definición 3.6.** Una curva cerrada simple del plano está **orientada positivamente** si al recorrer la curva la región interior de C queda a la izquierda.



Orientación positiva de una curva.

■ **Definición 3.7.** Consideremos un conjunto de curvas cerradas simples en $\mathbb{R}^2$, C_0, $C_1, ..., C_k$, tales que:

1. C_i se encuentra en el interior de C_0, $i = 1, ..., k$,

2. $C_i \cap C_j = \emptyset$, para $i \neq j$, $i = 1, ..., k$,

3. C_i se encuentra en el exterior de C_j, para $i \neq j$, $i = 1, ..., k$.

Al subconjunto D de los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que se encuentran en el interior de C_0 y en el exterior de cada C_i junto con los puntos (x, y) de las curvas C_0, $C_1, ..., C_k$, se le llama **región compacta** en $\mathbb{R}^2$.

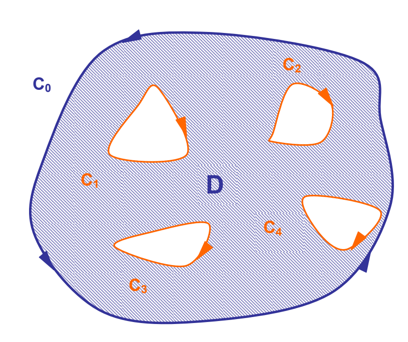


Figura 3.5: Ejemplo de región compacta en $\mathbb{R}^2$.

En este caso, la frontera de D, $\partial D = C_0 \cup C_1 \cup ... \cup C_k$ estará orientada positivamente si al recorrer las curvas C_0, $C_1, ..., C_k$, la región D queda a la izquierda, es decir, se orientará C_0 en sentido antihorario y cada C_i, $i = 1, ..., k$, en sentido horario (Figura 3.5).

■ **Teorema 3.3** (Teorema de Green)**.** Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F} = (M, N)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto U de $\mathbb{R}^2$. Sea $D \subset U$ una región compacta con su frontera ∂D^+ orientada positivamente. Entonces:

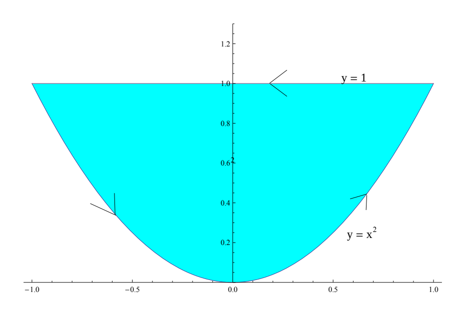
$$\int_{\partial D^+} \vec{F} d\vec{\sigma} = \int_{\vec{\sigma}} \vec{F} d\vec{\sigma} = \int \int_D (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}) dx\, dy$$

donde $\vec{\sigma}$ es un camino seccionalmente $\mathcal{C}^1$ cuya traza es ∂D^+.

Si $\partial D^+ = C_o \cup C_1 \cup ... \cup C_k$:

$$\int_{\partial D^+} \vec{F} d\vec{\sigma} = \sum_{i=0}^{k} \int_{C_i} \vec{F} d\vec{\sigma}.$$

Ejemplo 3.28. Verifiquemos que se cumple el teorema de Green para el campo $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $\vec{F}(x, y) = (3x^2y, -x^3)$ y la región D limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$.



Región D.

Solución. D es una región compacta. La frontera de D orientada positivamente, ∂D^+, es la traza del camino $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2$ donde

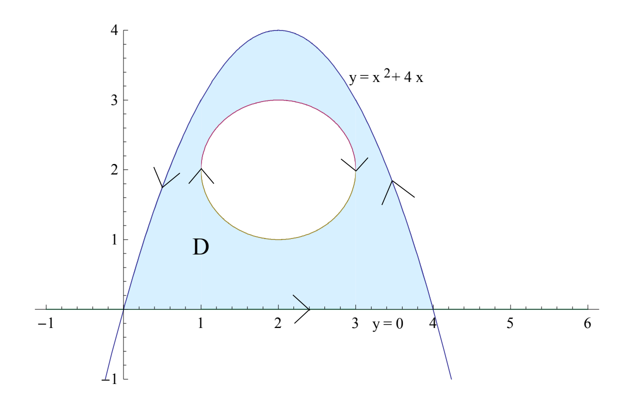
$$\vec{\sigma}_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{\sigma}_1(t) = (t, t^2)$$
$$\vec{\sigma}_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{\sigma}_2(t) = (-t, 1)$$

$$\int_{\partial D^+} \vec{F} d\vec{s} = \int_{\vec{\sigma}_1} \vec{F} d\vec{s} + \int_{\vec{\sigma}_2} \vec{F} d\vec{s} = \int_{-1}^{1} \vec{F}(\vec{\sigma}_1(t))\, \vec{\sigma}_1'(t)\, dt + \int_{-1}^{1} \vec{F}(\vec{\sigma}_2(t))\, \vec{\sigma}_2'(t)\, dt$$
$$= \int_{-1}^{1} (3t^4, -t^3)(1, 2t)\, dt + \int_{-1}^{1} (3t^2, t^3)(-1, 0)\, dt$$
$$= \int_{-1}^{1} t^4\, dt + \int_{-1}^{1} -3t^2\, dt = \left[\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{1} - \left[t^3\right]_{-1}^{1} = -\frac{8}{5}.$$

Por otra parte:

$$\iint_D \left(\frac{\partial(-x^3)}{\partial x} - \frac{\partial(3x^2y)}{\partial y} \right) dx\, dy = \iint_D (-6x^2)\, dx\, dy = -6 \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} x^2\, dy\, dx$$
$$= -6 \int_{-1}^{1} x^2(1 - x^2)\, dx = -6 \int_{-1}^{1} (x^2 - x^4)\, dx$$
$$= -6 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = -6(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}) = -\frac{8}{5}. \blacksquare$$

Ejemplo 3.29. Sea R_1 la región acotada del plano comprendida entre la parábola $y = -x^2 + 4x$ y el eje x, y sea R_2 el círculo de centro $(2, 2)$ y radio 1. Comprobemos que se verifica el teorema de Green para el campo $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (2y, 3x)$ y la región $D = R_1 - R_2$.



Región $D = R_1 - R_2$.

Solución. $\vec{F}$ es un campo vectorial definido en $\mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^1$, ya que sus componentes son funciones polinómicas y por tanto son de clase $\mathcal{C}^1$. D es una región compacta y su frontera orientada positivamente viene dada por $\partial D^+ = \partial R_1^+ \cup \partial R_2^-$, parametrizada por los caminos $\vec{\sigma}_1$ y $\vec{\sigma}_2$, respectivamente; a su vez, $\vec{\sigma}_1 = \vec{\sigma}_3 + \vec{\sigma}_4$:

$$\begin{aligned}
&\vec{\sigma}_3 : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{\sigma}_3(t) = (t, 0) \\
&\vec{\sigma}_4 : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{\sigma}_4(t) = (4-t, -t^2+4t) \\
&\vec{\sigma}_2 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{\sigma}_3(t) = (2+\cos t, 2-\sin t)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D^+} \vec{F} d\vec{s} &= \int_{\vec{\sigma}_1} \vec{F} d\vec{s} + \int_{\vec{\sigma}_2} \vec{F} d\vec{s} = \int_{\vec{\sigma}_3} \vec{F} d\vec{s} + \int_{\vec{\sigma}_4} \vec{F} d\vec{s} + \int_{\vec{\sigma}_2} \vec{F} d\vec{s} \\
&= \int_0^4 \vec{F}(t,0)(1,0)\, dt + \int_0^4 \vec{F}(4-t, -t^2+4t)(-1, -2t+4)\, dt + \\
&+ \int_0^{2\pi} \vec{F}(2+\cos t, 2-\sin t)(-\sin t, -\cos t)\, dt \\
&= \int_0^4 (0, 3t)(1,0)\, dt + \int_0^4 (-2t^2+8t, 12-3t)(-1, -2t+4)\, dt + \\
&+ \int_0^{2\pi} (-2\sin t + 4, 3\cos t + 6)(-\sin t, -\cos t)\, dt \\
&= \int_0^4 (8t^2 - 44t + 48)\, dt + \int_0^{2\pi} (2 - 5\cos^2 t - 4\sin t - 6\cos t)\, dt \\
&= \left[\frac{8t^3}{3} - 22t^2 + 48t\right]_0^4 + \left[2t - \frac{5t}{2} - \frac{5\sin 2t}{4} + 4\cos t - 6\sin t\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{32}{3} - \pi.
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}(3x) - \frac{\partial}{\partial y}(2y) \right) dx\, dy = \iint_D dx\, dy = 2 \text{ área}(R)$$
$$= \int_0^4 (-x^2 + 4x)\, dx - \pi$$
$$= \left[\frac{-x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^4 - \pi = \frac{32}{3} - \pi. \blacksquare$$

Una aplicación interesante del teorema de Green es el cálculo del área de una región plana encerrada por una curva de ecuaciones conocidas. Para ello, elegimos un campo $\vec{F} = (M, N)$ de modo que $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ sea constante. Por ejemplo, eligiendo el campo $\vec{F} = (M(x,y), N(x,y)) = (0, x)$ y aplicando el teorema de Green se obtiene:

$$\int_{\partial D^+} \vec{F} d\vec{s} = \int \int_D dx\, dy = \text{área de } D.$$

Ejercicio 3.14. Calcula el área encerrada por la traza del camino $\vec{\sigma} : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$. Obsérvese que se trata de una curva cerrada simple que se recorre en sentido horario. (Solución: $\frac{256}{15}$u.a.)

3.3.1. Ejercicios de la sección 3.3

1. Consideremos las regiones:

$$R_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 16\}$$
$$R_2 = \{(x, y) : (x - 2)^2 + y^2 \leq 1\}$$
$$R_3 = \{(x, y) : (x + 2)^2 + y^2 \leq 1\}$$

   Sea $D = R_1 - (IntR_2 \cup IntR_3)$. Verifica que se cumple el teorema de Green para el campo $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$ y la región D. (Solución: 28π.)

2. Calcula el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$ al mover una partícula rodeando una vez la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ en sentido antihorario.(Solución: -4π. u.t.).

3. Utiliza el teorema de Green para calcular la integral de línea del campo $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (2x + y, -x + 4xy)$ sobre la curva $x^2 + y^2 = 1$ recorrida 1 vez en sentido antihorario. (Solución: -2π).

4. Calcula la integral de línea del campo de fuerzas $\vec{F}(x, y) = (3y, 2x + 5)$ a lo largo de la curva frontera de la región comprendida entre el cuadrado formado por los puntos $(4, 0)$, $(-4, 0)$, $(0, -4)$, $(0, 4)$ recorrido en sentido horario y las circunferencias con centro en $(2, 0)$ y $(-2, 0)$ y de radio 1, recorrida en sentido antihorario. (Solución: $2\pi - 16$).

5. Halla el área de la región plana encerrada por la elipse que tiene por ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ mediante una integral de línea. (Solución: $\pi\, a\, b$ u.a.).

6. Calcula
$$\int_C \left(e^{-x^2/2} - y\right) dx + \left(e^{-y^2/2} + x\right) dy,$$
donde $C = C_1 \bigcup C_2$ siendo C_1 el triángulo de vértices $(0,0)$, $(3,6)$, $(6,0)$ recorrido en sentido antihorario y C_2 la circunferencia de centro $(3,3)$ y radio 1 recorrida en sentido horario. (Solución: $36 - 2\pi$).

3.4. LA INTEGRAL DE SUPERFICIE

Las integrales de superficie constituyen otro tipo de generalización de la integral simple. La región de integración es una superficie en $\mathbb{R}^3$, y como en el caso de las integrales de línea, el integrando puede ser una función escalar o un campo vectorial. El estudio de estas integrales nos conducirá a dos resultados clásicos del cálculo en $\mathbb{R}^n$: el teorema de Stokes y el teorema de la divergencia.

Las motivaciones que podemos encontrar para las integrales de superficie de funciones escalares son similares a las integrales de línea (masas, momentos promedios, etc); en el caso de funciones vectoriales estudiaremos cómo calcular el flujo de un campo a través de una superficie.

Veamos a continuación una breve introducción a las superficies en $\mathbb{R}^3$.

3.4.1. Superficies en $\mathbb{R}^3$

Podemos pensar en una superficie como un objeto bidimensional *inmerso* en el espacio $\mathbb{R}^3$. Por tanto, una superficie es la imagen en $\mathbb{R}^3$ de una función definida en un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que es bidimensional. Vimos cómo una curva en el espacio se puede parametrizar mediante una función vectorial $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(t)$ donde t recorre un cierto intervalo I. Análogamente, una superficie K se puede parametrizar en el espacio mediante una función vectorial $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}(u,v)$ donde (u,v) recorren una determinada región D en el plano uv. Definimos, así, el concepto de superficie paramétrica regular simple con el que vamos a trabajar y que luego generalizaremos.

■ **Definición 3.8.** Sea D un dominio en $\mathbb{R}^2$ y sea
$$\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \;\; \vec{\Phi}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

A la imagen de D mediante la función $\vec{\Phi}$, $K = \vec{\Phi}(D)$, se le llama **superficie paramétrica**.

La función $\vec{\Phi}$ es una parametrización de K.

Si $\vec{\Phi}$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$, llamamos a K superficie diferenciable o de clase $\mathcal{C}^1$.

Si $\vec{\Phi}$ es inyectiva, diremos que $K = \vec{\Phi}(D)$ es una superficie paramétrica simple; es decir, una superficie simple es aquélla que no tiene autointersecciones.

Si los vectores

$$\vec{T}_u(u,v) = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u,v) = (\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v), \frac{\partial z}{\partial u}(u,v))$$
$$\vec{T}_v(u,v) = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u,v) = (\frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u,v), \frac{\partial z}{\partial v}(u,v))$$

son linealmente independientes $\forall (u,v) \in D$, diremos que $K = \vec{\Phi}(D)$ es una superficie paramétrica regular o suave.

Las derivadas parciales de $\vec{\Phi}$ calculadas en un punto $\vec{q}=\vec{\Phi}(u_0,v_0)$ representan, geométricamente, los vectores tangentes en $\vec{q}$ a las curvas $\vec{\Phi}(u,v_0)$ y $\vec{\Phi}(u_0,v)$, respectivamente. Si en D fijamos v constante, $v=v_0$, y variamos u, entonces $\vec{\Phi}(u,v_0)$ describe una curva en $\mathbb{R}^3$ sobre la superficie K, por tanto, $\vec{T}_u = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u_0,v_0)$ es el vector tangente a dicha curva en el punto $\vec{q}$. Análogamente, si fijamos u constante, $u=u_0$, y variamos v, entonces $\vec{\Phi}(u_0,v)$ describe una curva en $\mathbb{R}^3$ sobre la superficie K y $\vec{T}_v = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u_0,v_0)$ es el vector tangente a dicha curva en el punto $\vec{q}$ (ver Figura 3.6).

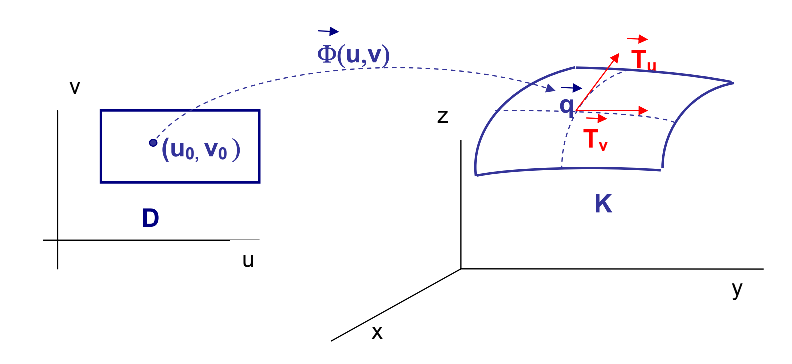


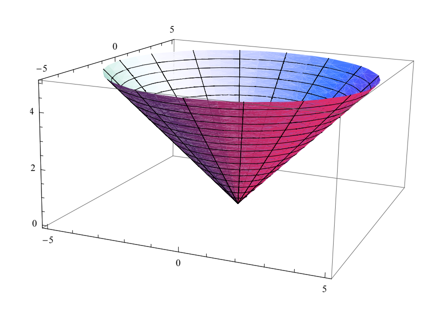
Figura 3.6: Vectores tangentes a una superficie en un punto.

Si los vectores $\vec{T}_u$ y $\vec{T}_v$ son linealmente independientes (o equivalentemente si $\vec{T}_u \times \vec{T}_v \neq \vec{0}$), entonces definen un plano tangente a la superficie K en $\vec{q}$. Diremos, en este caso, que $\vec{q}$ es un punto regular. Los puntos donde las componentes de $\vec{T}_u$ o $\vec{T}_v$ no son continuas o bien $\vec{T}_u \times \vec{T}_v$ es $\vec{0}$, se llaman puntos singulares de K. Trabajaremos, en principio, con superficies que no tienen puntos singulares.

Si una superficie parametrizada por $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es regular en un punto $\vec{q} = \vec{\Phi}(u_0,v_0) = (x_0,y_0,z_0)$, entonces se define el plano tangente a la superficie K en el punto $\vec{q}$ como el plano determinado por los vectores $\vec{T}_u$ y $\vec{T}_v$ y su ecuación es:

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0).\vec{N}_{\vec{q}} = 0.$$

Ejemplo 3.30. Veamos si la superficie definida por $x = v\cos u$, $y = v\sin u$, $z = v$, $0 \le u \le 2\pi$, $v \ge 0$, es de clase C^1 y si es regular.



Hoja superior del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solución. La parametrización $\vec{\Phi}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v)$ describe la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, que es la hoja superior de un cono con vértice en $(0, 0, 0)$. Es diferenciable ya que cada función componente es diferenciable (como función de u y v). Pero no es regular en $(0, 0, 0) = \vec{\Phi}(0, 0)$, ya que

$$\vec{T}_u(0,0) = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(0,0) = (-v \sin u, v \cos u, 0)|_{(0,0)} = (0,0,0)$$
$$\vec{T}_v(0,0) = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(0,0) = (\cos u, \sin u, 1)|_{(0,0)} = (1,0,1)$$

por tanto, $\vec{T}_u(0,0) \times \vec{T}_v(0,0) = \vec{0}$ y el punto $(0, 0, 0)$ no es regular. ■

⬢ **Ejercicio 3.15.** Calcula el plano tangente a la superficie del ejemplo anterior en el punto $\vec{\Phi}(1, 0) = (1, 0, 1)$. (Solución: $z = x$).

⬢ **Ejemplo 3.31.** Sea la región $D = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 2,\ 0 \leq v \leq 1\}$ y sea $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{\Phi}(u, v) = (u, v, 2u + 3v + 1)$. Veamos que $K = \vec{\Phi}(D)$ es una superficie paramétrica regular simple.

Solución. $\vec{\Phi}$ es inyectiva: supongamos que $\vec{\Phi}(u_1, v_1) = \vec{\Phi}(u_2, v_2)$, entonces

$$(u_1, v_1, 2u_1 + 3v_1 + 1) = (u_2, v_2, 2u_2 + 3v_2 + 1),$$

de donde se tiene, igualando componentes, que $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$.

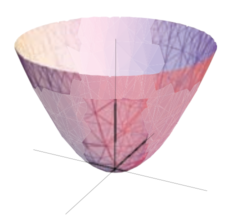
La función $\vec{\Phi}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ ya que sus componente son funciones polinómicas y los vectores

$$\vec{T}_u(u,v) = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u,v) = (1,0,2)$$
$$\vec{T}_v(u,v) = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u,v) = (0,1,3)$$

son linealmente independientes $\forall (u, v) \in D$. Por tanto, $K = \vec{\Phi}(D)$ es una superficie paramétrica regular simple.

Esta superficie representa geométricamente el trozo del plano $z = 2x+3y+1$ por encima de D. ■

⬣ **Ejemplo 3.32.** Consideremos la región del plano $D = \{(u, v)/\ u^2 + v^2 \leq 1\}$ y sea $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{\Phi}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$. Veamos que $K = \vec{\Phi}(D)$ es una superficie paramétrica regular simple.



Paraboloide.

Solución. $\vec{\Phi}$ es inyectiva: supongamos que $\vec{\Phi}(u_1, v_1) = \vec{\Phi}(u_2, v_2)$, entonces

$$(u_1, v_1, u_1^2 + v_1^2) = (u_2, v_2, u_2^2 + v_2^2),$$

de donde se tiene que $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$.

$\vec{\Phi}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ y los vectores

$$\vec{T}_u(u, v) = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) = (1, 0, 2u)$$
$$\vec{T}_v(u, v) = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v) = (0, 1, 2v)$$

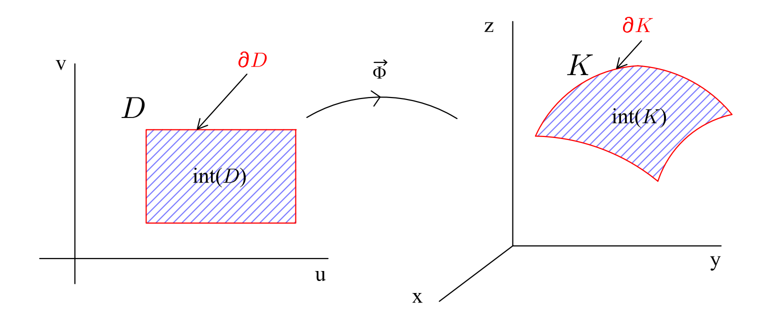
son linealmente independientes $\forall (u, v) \in D$. Por tanto, $K = \vec{\Phi}(D)$ es una superficie paramétrica regular simple.

Esta superficie representa la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ por debajo del plano $z = 1$. ■

Como se ha visto en los ejemplos, un tipo de superficies regulares simples son aquéllas que constituyen la gráfica de una función de dos variables ($f \in \mathcal{C}^1$). La ecuación $z = f(x, y)$ es una representación explícita de la superficie cuya representación paramétrica o vectorial tomará la forma

$$\vec{\Phi}(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

■ **Definición 3.9.** Dada una superficie paramétrica regular simple $K = \vec{\Phi}(D)$ parametrizada por la función $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, llamaremos **frontera** de K al conjunto $\partial K = \vec{\Phi}(\partial D)$ y llamaremos **interior** de K al conjunto $IntK = \vec{\Phi}(IntD)$.



Interior y frontera de una superficie K.

Si $\vec{\sigma} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ es una parametrización C^1 a trozos de ∂D, entonces $\vec{\Phi} \circ \vec{\sigma} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización C^1 a trozos de ∂K.

Ejemplo 3.33. Hallemos una parametrización de ∂K para las superficies dadas en el Ejemplo 3.31 y en el Ejemplo 3.32.

Solución. Para el Ejemplo 3.31 una parametrización de la frontera de D es $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2 + \vec{\sigma}_3 + \vec{\sigma}_4$, donde

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}_1 &: [0,2] \to \mathbb{R}^2, \ \vec{\sigma}_1(t) = (t,0) \\
\vec{\sigma}_2 &: [0,1] \to \mathbb{R}^2, \ \vec{\sigma}_2(t) = (2,t) \\
\vec{\sigma}_3 &: [0,2] \to \mathbb{R}^2, \ \vec{\sigma}_3(t) = (2-t,1) \\
\vec{\sigma}_4 &: [0,1] \to \mathbb{R}^2, \ \vec{\sigma}_4(t) = (0,1-t)
\end{aligned}$$

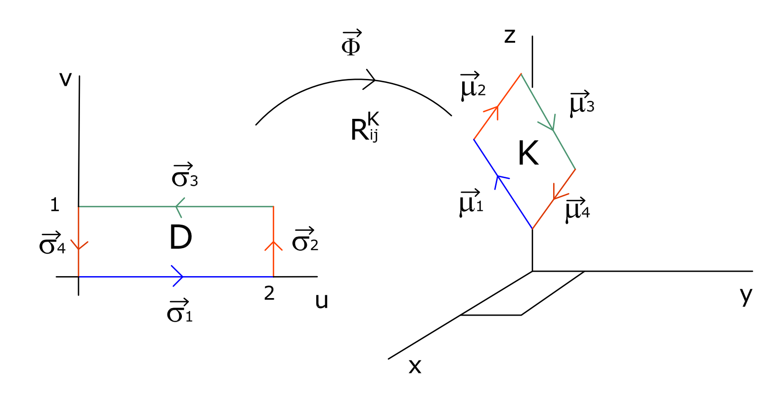
Con esta parametrización $\vec{\sigma}$ está orientada positivamente.

Entonces, $\partial K = \vec{\Phi}(\partial D)$ es la imagen del camino

$$\vec{\mu}(t) = \vec{\Phi} \circ \vec{\sigma} = \vec{\Phi} \circ \vec{\sigma}_1 + \vec{\Phi} \circ \vec{\sigma}_2 + \vec{\Phi} \circ \vec{\sigma}_3 + \vec{\Phi} \circ \vec{\sigma}_4,$$

donde

$$\begin{aligned}
\vec{\Phi} \circ \vec{\sigma}_1 &: [0,2] \to \mathbb{R}^3, \ \vec{\Phi} \circ \vec{\sigma}_1(t) = (t,0,2t+1). \\
\vec{\Phi} \circ \vec{\sigma}_2 &: [0,1] \to \mathbb{R}^3, \ \vec{\Phi} \circ \vec{\sigma}_2(t) = (2,t,4+3t+1). \\
\vec{\Phi} \circ \vec{\sigma}_3 &: [0,2] \to \mathbb{R}^3, \ \vec{\Phi} \circ \vec{\sigma}_3(t) = (2-t,1,8-2t). \\
\vec{\Phi} \circ \vec{\sigma}_4 &: [0,1] \to \mathbb{R}^3, \ \vec{\Phi} \circ \vec{\sigma}_4(t) = (0,1-t,4-3t).
\end{aligned}$$



Frontera de la superficie K.

Para el Ejemplo 3.32 la frontera de la región D está parametrizada por $\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t)$; por tanto, una parametrización para ∂K será $\vec{\mu} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, con

$$\vec{\mu}(t) = \vec{\Phi}\circ\vec{\sigma}(t) = \vec{\Phi}(\cos t, \sin t) = (\cos t, \sin t, \cos^2 t + \sin^2 t) = (\cos t, \sin t, 1). \blacksquare$$

Una superficie K puede representarse mediante diferentes parametrizaciones.

■ **Definición 3.10.** Sea K una superficie regular simple, imagen de la función $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y sea $\vec{\varphi} : D' \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función biyectiva de clase C^1 definida en la región D' que es de tipo 1 ó 2, de modo que $\dfrac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(s,t)} \neq 0$. A la función compuesta $\vec{\Psi} = \vec{\Phi} \circ \vec{\varphi}$ se le llama **reparametrización** de $\vec{\Phi}$ (o de K).

La condición de ser biyectiva hace que se conserve la inyectividad de $\vec{\Phi}$, la condición de que $\vec{\varphi}$ sea de clase $\mathcal{C}^1$ asegura que $\vec{\Psi}$ también lo sea y la condición $\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)} \neq 0$ conserva la independencia lineal de los vectores derivadas, ya que:

■ **Propiedad 3.1.**

$$\frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(s,t)} . \left(\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial u}(\vec{\varphi}(s,t)) \times \frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial v}(\vec{\varphi}(s,t))\right).$$

Esta relación será útil más adelante para ver cómo ciertas propiedades de las superficies pueden variar o no bajo reparametrizaciones.

Veamos cómo ampliar el concepto de superficie simple a superficies más generales (que llamaremos simplemente superficies) donde quedarán incluidas las superficies que puedan obtenerse "pegando" superficies simples, es decir que sean imagen bajo una función $\vec{\Phi}$ de una unión de regiones simples de tipo 1 ó 2 en $\mathbb{R}^2$ con interiores disjuntos.

Dicha función conservará las propiedades de inyectividad y de independencia lineal de las parciales salvo en las fronteras, que están formadas por una unión finita de gráficas de funciones continuas. De este modo, podremos trabajar, con superficies como un cubo o una esfera.

■ **Definición 3.11.** Sean $D_1, D_2, ..., D_m$ regiones de tipo 1 ó 2 en $\mathbb{R}^2$ tales que sus interiores son disjuntos dos a dos, $IntD_i \cap IntD_j = \emptyset$, $i \neq j$. Sea $D = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_m$, sea $F = \partial D_1 \cup \partial D_2 \cup ... \cup \partial D_m$ y sea $V = IntD_1 \cup IntD_2 \cup ... \cup IntD_m$.

Sea $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que:

(i). $\vec{\Phi} : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$es inyectiva.

(ii). Los vectores $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}$ y $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}$ son linealmente independientes $\forall (u, v) \in V$.

(iii). $\vec{\Phi}(V) \cap \vec{\Phi}(F) = \emptyset$.

Entonces, a $K = \vec{\Phi}(D)$ se le llama **superficie** (o superficie regular a trozos).

⬢ **Ejemplo 3.34.** Veamos que una esfera y un cono son superficies.

Solución. Una parametrización la esfera $x^2+y^2+z^2 = R^2$ se obtiene mediante las coordenadas esféricas: $\vec{\Phi} : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{\Phi}(u, v) = (R \cos u \sin v,\ R \sin u \sin v,\ R \cos v).$$

Esta función no es inyectiva pero, como la inyectividad sólo falla en ∂D, sí cumple las condiciones de superficie dada anteriormente.

En el caso del cono, vamos a parametrizar la hoja superior con vértice en el origen y altura h correspondiente a la gráfica de la función $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Una parametrización es $\vec{\Phi} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\vec{\Phi} : [0, 2\pi] \times [0, h] \to \mathbb{R}^3,\ \vec{\Phi}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v).$$

Observamos que $\vec{\Phi}$ no es inyectiva en ∂D, pues $\vec{\Phi}(0, v) = \vec{\Phi}(2\pi, v) = (v, 0, v)$ y $\vec{\Phi}(u, 0) = (0, 0, 0)$. Además, los vectores $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}$ y $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}$ son linealmente dependientes en los puntos $(u, 0)$ ya que $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, 0) = (0, 0, 0)$. Pero en $Int(D)$ sí cumple los requisitos de la definición dada para superficie. ■

⬢ **Ejercicio 3.16.** Parametriza la superficie definida por un cubo en $\mathbb{R}^3$.

3.4.2. Área de una superficie

Como hemos visto, dada una superficie regular simple, se tiene definido en cada punto $\vec{q} = \vec{\Phi}(u_o, v_o)$ un vector normal a la superficie en dicho punto, que viene dado por:

$$\vec{N}_{\vec{\Phi}}(u_0, v_0) = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u_0, v_0).$$

A partir del plano tangente a una superficie suave en cada punto, calculamos el área de dicha superficie. Para ello procedemos de la forma siguiente:

- Tomamos una partición de la región D en $n \times n$ rectángulos R_{ij}^D (ver Figura 3.7).

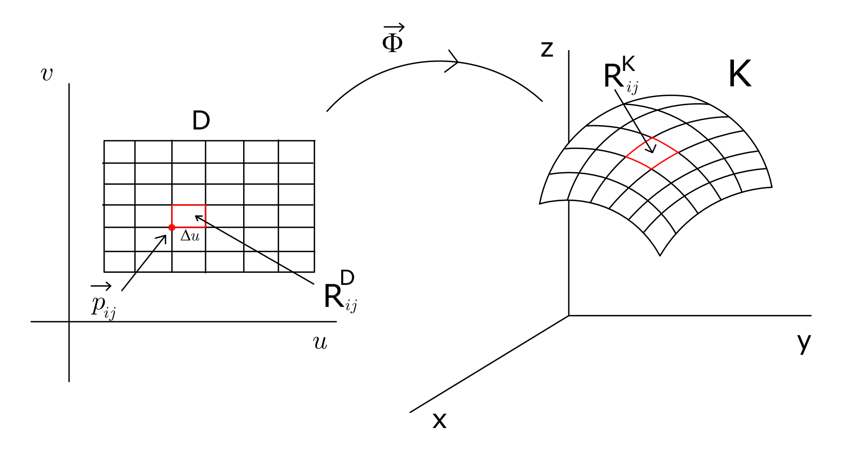


Figura 3.7: Particiones en D y en K.

- Trasladamos esta partición a la superficie K. Esto es, un rectángulo de D que tenga área $\Delta u \Delta v$ se convierte, a través de $\vec{\Phi}$, en una porción de K, digamos R_{ij}^K, que aproximaremos mediante un paralelogramo determinado por los vectores $\vec{\omega}_1 = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}\Delta u$ y $\vec{\omega}_2 = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}\Delta v$ (ver Figura 3.8), cuya área viene dada por:

$$\|\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2\| = \left\| \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| \Delta u \, \Delta v.$$

- Tomando un punto de un elemento de la partición de D. Así, si $\vec{p}_{ij} = (u_i, v_j)$ es el vértice inferior izquierdo de cada rectángulo R_{ij}^D, se tiene:

$$\text{área de } R_{ij}^K \approx \left\| \vec{N}_{\vec{\Phi}}(\vec{p}_{ij}) \right\| \Delta u \, \Delta v.$$

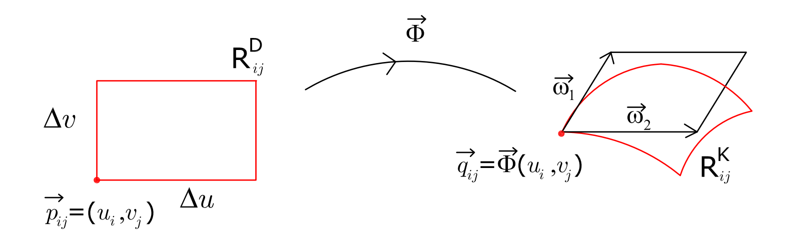


Figura 3.8: Aproximación del área de R_{ij}^K.

- Una aproximación del área total viene dada por:

$$\text{área de } K \approx \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \vec{N}_{\vec{\Phi}}(u_i, v_j) \right\| \Delta u \, \Delta v.$$

- Identificando el último sumatorio como una suma de Riemann de la función $\|N_{\vec{\Phi}}(u,v)\|$ sobre la región $D \subset \mathbb{R}^2$ y haciendo que crezca el número de rectángulos de la partición y, por tanto, tiendan a cero las áreas de los rectángulos, la suma de Riemann se convertirá en una integral doble, que nos da el valor exacto del área de K,

$$\text{área de } K = \iint_D \left\|\vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v)\right\| du\, dv.$$

La definición de área obtenida es igualmente válida si el integrando es una función discontinua en un subconjunto de D formado por gráficas de funciones continuas, lo que nos permite establecer la definición de área para superficies más generales.

Además, si $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_m$ y $K = \vec{\Phi}(D)$, entonces

$$\text{área de } K = \sum_{i=1}^{m} \iint_{D_i} \left\|\vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v)\right\| du\, dv.$$

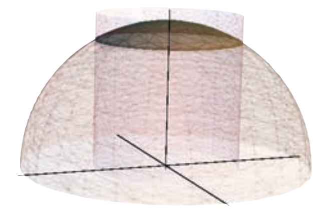
La definición de área obtenida es independiente de la parametrización utilizada. Supongamos que $K = \vec{\Phi}(D)$ y que $\vec{\Psi}$ es una reparametrización:

$$\begin{aligned}
\text{área de } K \text{ (mediante } \vec{\Phi}) &= \iint_D \left\|\vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v)\right\| du\, dv = \text{(T. cambio de variables)} \\
&= \iint_{D'} \left\|\vec{N}_{\vec{\Phi}}(\varphi(s,t))\right\| \left|\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)}\right| ds\, dt \\
&= \iint_{D'} \left\|\vec{N}_{\vec{\Psi}}(s,t)\right\| ds\, dt = \text{área de } K (\text{mediante } \vec{\Psi}).
\end{aligned}$$

En el caso particular en que la superficie K sea la gráfica de una función $f(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^1$ con $(x,y) \in D$, la superficie K admite la parametrización $\vec{\Phi}(u,v) = (u, v, f(u,v))$. En este caso, la fórmula del área queda:

$$\text{área de } K = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1}\, du\, dv.$$

Ejemplo 3.35. Sea K la porción de casquete esférico $z = \sqrt{R_1^2 - x^2 - y^2}$ cortada por el cilindro circular recto $x^2 + y^2 = R_2^2$, $R_1 > R_2$. Calculemos el área de K.

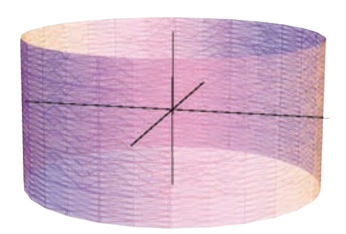


Casquete esférico.

Solución. Esta superficie es la gráfica de la función $f(u,v)=\sqrt{R_1^2-u^2-v^2}$ sobre la región $D=\{(u,v)\,/\,u^2+v^2\leq R_2^2\}$. Por tanto:

$$\begin{aligned}
A(K) &= \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2+1}\,du\,dv \\
&= \iint_D \sqrt{\frac{u^2}{R_1^2-u^2-v^2}+\frac{v^2}{R_1^2-u^2-v^2}+1}\,du\,dv \\
&= \iint_D \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2-u^2-v^2}}\,du\,dv = R_1\int_0^{2\pi}\int_0^{R_2}\frac{r}{\sqrt{R_1^2-r^2}}\,dr\,d\theta \\
&= -R_1\int_0^{2\pi}\left[\sqrt{R_1^2-r^2}\right]_0^{R_2}d\theta = 2\pi R_1(R_1-\sqrt{R_1^2-R_2^2})\text{ u.a.} \blacksquare
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.36. Calculemos el área del cilindro $K=\vec{\Phi}(D)$ siendo $D=[0,2\pi]\times[-1,1]$ y $\vec{\Phi}:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $\vec{\Phi}(u,v)=(R\cos u, R\sin u, v)$.



Cilindro.

Solución. En este caso

$$\vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -R\sin u & R\cos u & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(R\cos u, R\sin u, 0);$$

entonces, $\left\|\vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v)\right\|=R$ y se tiene que:

$$\begin{aligned}
\text{área de } K &= \iint_D \left\|\vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v)\right\|du\,dv=\iint_D R\,du\,dv=R\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}du\,dv \\
&= 4\pi R\text{ u.a.} \blacksquare
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.17. Calcula el área de la superficie parabólica $K=\vec{\Phi}(D)$ siendo $D=\{(u,v):u^2+v^2\leq 1\}$ y $\vec{\Phi}:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $\vec{\Phi}(u,v)=(u,v,u^2+v^2)$. (Solución: $\frac{(5\sqrt{5}-1)\pi}{6}$ u.a.)

Ejercicio 3.18. Comprueba que el área de una esfera de radio R es $4\pi R^2$.

3.4.3. Integrales de superficie de funciones escalares

Supongamos que queremos calcular la masa total de una lámina cuya forma es la de una superficie regular simple $K = \vec{\Phi}(D)$ y cuya densidad es variable, valiendo en cada punto $\rho(x, y, z)\ gr/cm^2$.
(1) Si la densidad es constante, es decir, $\rho(x, y, z) = \rho_0\ gr/cm^2$ para cualquier $(x, y, z) \in K$, entonces el cálculo de la masa es inmediato:

$$M = \rho_0 \text{ área}(K)\ gr.$$

(2) Si la densidad es variable en cada punto, tenemos que recurrir al concepto de integral. Para ello:

- Dividimos K en pequeños rectángulos, R_{ij}^K; cada uno de ellos será imagen mediante $\vec{\Phi}$ de un rectángulo R_{ij}^D correspondiente a una partición de D (ver figura 3.7).
- Sea $\vec{p}_{ij}$ un punto cualquiera de R_{ij}^D y $\vec{q}_{ij} = \vec{\Phi}(\vec{p}_{ij})$ un punto en R_{ij}^K. Entonces:
$$\text{Masa de } R_{ij}^K \approx \rho(\vec{q}_{ij}) \text{ área}(R_{ij}^K).$$
- Una aproximación a la masa total es.
$$M \approx \sum_{i,i} \rho(\vec{q}_{ij}) \text{ área}(R_{ij}^K) = \sum_{i,i} \rho(\vec{\Phi}(\vec{p}_{ij})) \left\| \vec{N}_{\vec{\Phi}}(\vec{p}_{ij}) \right\| \Delta u\, \Delta v.$$
- Tomando límites cuando las áreas de los rectángulos de la partición de D tienden a 0, tenemos:
$$\text{Masa total} = \iint_D \rho(\vec{\Phi}(u, v)) \ \left\| \vec{N}_{\vec{\Phi}}(u, v) \right\| du\, dv.$$

■ **Definición 3.12.** Sea $K = \vec{\Phi}(D)$ una superficie regular simple parametrizada por $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua definida sobre K. Se define la **integral de superficie** de la función f sobre K como:

$$\iint_K f\, dS = \iint_D f(\vec{\Phi}(u, v)) \left\| \vec{N}_{\vec{\Phi}}(u, v) \right\| du\, dv.$$

De nuevo se obtiene:

$$\iint_K 1\ dA = \text{área}(K).$$

Si K es unión de superficies paramétricas K_i, $i = 1, ..., m$ que no se intersectan, salvo quizás a lo largo de las curvas que definen sus fronteras, entonces:

$$\iint_K f dS = \sum_{i=1}^{m} \iint_{K_i} f dS.$$

Ejemplo 3.37. Hallemos $\iint_K z^2\,dS$ donde K es la esfera $x^2+y^2+z^2=R_0^2$.

Solución. Tomamos la parametrización de la esfera:

$$\vec{\Phi}:D\to\mathbb{R}^3,\ \ \vec{\Phi}(u,v)=(R_0\cos u\sin v, R_0\sin u\sin v, R_0\cos v)$$

siendo $D=[0,2\pi]\times[0,\pi]$. Con esta parametrización se tiene que:

$$\vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v)=(-R_0^2\cos u\sin^2 v, -R_0^2\sin u\sin^2 v, -R_0^2\sin v\cos v),$$

de donde $\left\|\vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v)\right\|=R_0^2\,|\sin v|$; entonces:

$$\begin{aligned}\iint_K z^2 dS &= \iint_D (R_0\cos v)^2\ R_0^2\,|\sin v|\ du\,dv = R_0^4\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 v\sin v\,dv\,du\\ &= R_0^4\int_0^{2\pi}\left[-\frac{\cos^3 v}{3}\right]_0^{\pi} du = R_0^4 2\pi\,(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}) = \frac{4\pi R_0^4}{3}.\ \blacksquare\end{aligned}$$

Ejemplo 3.38. Calculemos la masa del trozo de cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ que queda por debajo del plano $z=2$, si la densidad en cada punto es igual a su distancia al plano xy (gr/cm^2).

Solución. La función de densidad viene dada por:

$$\rho(x,y,z)=z.$$

Puesto que consideramos el trozo de cono por debajo del plano $z=2$, una parametrización para esta superficie viene dada por:

$$\vec{\Phi}:D\to\mathbb{R}^3,\ \ \vec{\Phi}(u,v)=(v\cos u, v\sin u, v)$$

con $D=[0,2\pi]\times[0,2]$. En este caso,

$$\vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -v\sin u & v\cos u & 0\\ \cos u & \sin u & 1\end{vmatrix}=(v\cos u, v\sin u, -v)$$

y su módulo es $\left\|\vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v)\right\|=\sqrt{2}\,v$.

Entonces, la masa de la superficie $K=\vec{\Phi}(D)$ es:

$$\begin{aligned}M_T &= \iint_K \rho\,dS = \iint_D \rho(\vec{\Phi}(u,v))\ \left\|\vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v)\right\| du\,dv\\ &= \iint_D v\sqrt{2}\,v\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} v^2\sqrt{2}\,du\,dv\\ &= 2\pi\sqrt{2}\left[\frac{v^3}{3}\right]_0^2 = 2\pi\sqrt{2}\frac{8}{3} = \frac{16\pi}{3}\sqrt{2}\ gr.\ \blacksquare\end{aligned}$$

Ejercicio 3.19. Supongamos una lámina triangular cuya forma es la porción del plano $x+y+z=1$ que se encuentra en el primer octante. Supongamos que la densidad de la lámina en cada punto (x,y,z) es proporcional al cuadrado de la distancia del punto al origen, siendo 1 gr/cm^2 en el punto $(1,0,0)$. Calcula la masa total de la lámina. (Solución: $\frac{\sqrt{3}}{4}$ gr).

3.4.4. Aplicaciones de las integrales de superficie de funciones escalares

Entre las aplicaciones de las integrales de superficie de funciones escalares tenemos, además del cálculo de la masa total de una lámina ya visto, el cálculo de centros de masa, momentos y valor medio de una función definida sobre una superficie, con fórmulas análogas al caso de integrales de camino.

1. Masa de una lámina en $\mathbb{R}^3$. Si la lámina constituye una superficie paramétrica K, su masa es:

$$M = \iint_K 1 \, dS.$$

2. Centro de masas de una lámina en $\mathbb{R}^3$. Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del centro de masas vienen dadas por:

$$\bar{x} = \frac{\iint_K \; x \; \rho \; dS}{\iint_K \; \rho \; dS}, \; \bar{y} = \frac{\iint_K \; y \; \rho \; dS}{M_T}, \; \bar{z} = \frac{\iint_K \; z \; \rho dS}{M_T},$$

siendo $\rho = \rho(x, y, z)$ la densidad en cada punto de la superficie K.

3. Promedios. El valor promedio de una función f sobre una superficie K es:

$$\bar{f}_K = \frac{\iint_K f dS}{\text{Área}(K)}.$$

Ejemplo 3.39. Hallemos la densidad promedio del cono del Ejemplo 3.38.

Solución.

$$\bar{\rho} = \frac{\iint_K \; \rho \; dS}{A(K)} = \frac{M_T}{\iint_D \left\| \vec{N}_{\vec{\Phi}}(u, v) \right\| du \, dv} = \frac{M_T}{\iint_D \sqrt{2} du \, dv}$$

$$= \frac{M_T}{\int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{2} dr \, d\theta} = \frac{\frac{16\pi}{3}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\, 2\pi 2} = \frac{4}{3} \; gr/cm^2. \; \blacksquare$$

Ejemplo 3.40. Calculemos las coordenadas del centro de masa de la superficie parabólica $K = \vec{\Phi}(D)$, $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con $D = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$, $\vec{\Phi}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, suponiendo que se trata de un cuerpo homogéneo.

Solución. Puesto que el cuerpo es homogéneo, la densidad es constante en toda la superficie, supongamos que vale ρ_0, y además se tiene, por simetría de la superficie, que $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$\bar{z} = \frac{\iint_K z\,\rho\, dS}{M_T} = \frac{\iint_K z\,\rho_0\, dS}{\iint_K \rho_0\, dS} = \frac{\iint_K z\, dS}{A(K)} = \frac{\iint_D (u^2+v^2)\left\|\vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v)\right\| du\, dv}{A(K)}$$

$$= \frac{1}{A(K)} \iint_D (u^2+v^2)\sqrt{4u^2+4v^2+1}du\, dv = \frac{1}{A(K)} \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\sqrt{4r^2+1}\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{A(K)} \int_0^1 r^3\sqrt{4r^2+1}\, dr = (\text{cambio } z = \sqrt{4r^2+1}) = \frac{\pi/8}{A(K)} \int_1^{\sqrt{5}} (z^4 - z^2)\, dz$$

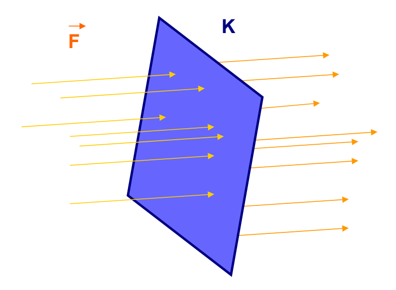
$$= \frac{1}{A(K)} \frac{\pi}{8} \left[\frac{z^5}{5} - \frac{z^3}{3}\right]_1^{\sqrt{5}} = d\frac{1}{A(K)} \frac{\pi}{12}(5\sqrt{5} + \frac{1}{5}) = (\text{por ejercicio 3.17})$$

$$= \frac{6}{\pi(5\sqrt{5}-1)} \frac{\pi(5\sqrt{5}+\frac{1}{5})}{12} = \frac{(5\sqrt{5}+\frac{1}{5})}{2(5\sqrt{5}-1)} \approx 0{,}5589. \blacksquare$$

Ejercicio 3.20. Calcula el centro de masas de la superficie anterior a la que le hemos añadido "tapa". (Solución: $\dfrac{\frac{\pi}{12}(5\sqrt{5}+\frac{1}{5})+\pi}{\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)+\pi} \approx 0{,}7225$).

3.4.5. Integrales de superficie de funciones vectoriales

La idea física asociada a este concepto es el flujo de un campo vectorial a través de una superficie K.



Flujo a través de una superficie.

Supongamos que $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo continuo en $\mathbb{R}^3$ y que K es una superficie regular simple. Si $\vec{F}$ representa el campo de velocidades de un fluido (supongamos que $\vec{F}(\vec{q})$ está dado en m/sg), se trata de ver cuál es el flujo (cantidad de líquido por segundo, m^3/sg) de éste a través de la superficie K.

Además, tendremos que indicar si el flujo "sale" o "entra" a través de una superficie. Para ello se introduce el concepto de orientación de superficies.

Diremos que una superficie K es orientable si podemos distinguir cuál es cada uno de sus lados, por ejemplo, pintando cada uno de un color distinto.

Si la superficie es simple, su frontera separa cada uno de sus lados. Si es una superficie más general como una esfera, sus lados se identifican con su interior y su exterior.

Un ejemplo de superficie no orientable en $\mathbb{R}^3$ es la banda de Moëbius (ver Figura 3.9), en la que no podemos distinguir dos caras.

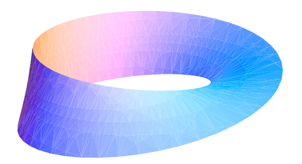


Figura 3.9: Cinta de Moëbius.

La propiedad de ser orientable se determina mediante los vectores normales que apuntarán en la dirección de uno de sus lados.

■ **Definición 3.13.** Se define **campo de vectores normales** a una superficie K, al campo $\vec{N} : K \to \mathbb{R}^3$ que a cada $\vec{q} \in K$ le asocia un vector normal a K en $\vec{q}$, $\vec{N}(\vec{q})$, no nulo y con norma 1.

Entonces:

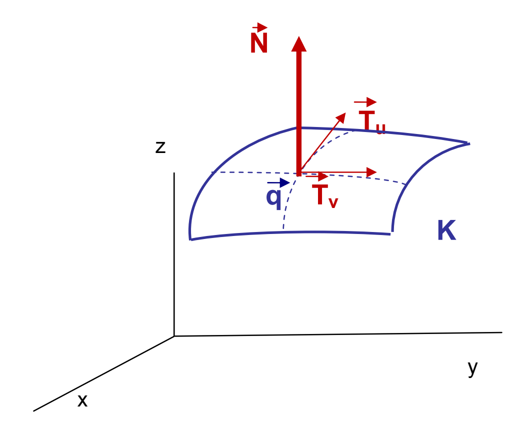
■ **Definición 3.14.** Una superficie K es **orientable** si existe un campo de vectores normales a K continuo.

Definido un campo de vectores normales queda asignada una orientación.

■ **Definición 3.15.** Al par $(K, \vec{N})$ se le llama **superficie orientada**.

Toda superficie paramétrica simple es orientable pues podemos tomar como campo de vectores normales al campo definido por:

$$\vec{N} = \frac{\vec{N}_{\vec{\Phi}}}{\left\|\vec{N}_{\vec{\Phi}}\right\|}.$$



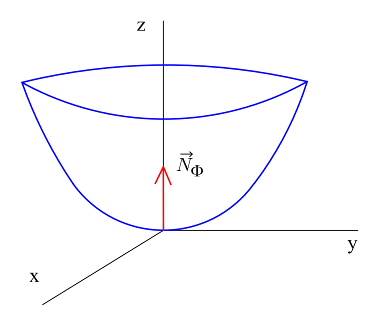
Vector normal a una superficie.

Un cambio de parametrización puede producir un cambio de orientación, por tanto, hablaremos de parametrizaciones que conservan la orientación o invierten la orientación.

Ejemplo 3.41. Consideremos la superficie parabólica $K = \vec{\Phi}(D)$, parametrizada por $\vec{\Phi} : \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 10\} \to \mathbb{R}^3$, con $\vec{\Phi}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$. ¿Cuál es la orientación inducida por esta parametrización?

Solución. La orientación inducida por esta parametrización viene dada por el vector:

$$\vec{N}_{\vec{\Phi}} = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v) = (-, 2u, -2v, 1).$$



Orientación del paraboloide.

Dibujando un vector normal en algún punto de la superficie, por ejemplo en el punto $(0, 0, 0) = \vec{\Phi}(0, 0)$ donde el vector $\vec{N}_{\vec{\Phi}}$ es $(0, 0, 1)$, observamos que apunta hacia Z^+, es decir, hacia el "interior" del paraboloide. ■

Por tanto, para calcular el flujo de un campo a través de una superficie consideraremos superficies orientables.

Para cada punto $\vec{q} \in K$, el vector $\vec{F}(\vec{q})$ puede descomponerse como suma de los vectores $\vec{F}_T(\vec{q})$ y $\vec{F}_N(\vec{q})$ donde $\vec{F}_T(\vec{q})$ se encuentra en el plano tangente a K y $\vec{F}_N(\vec{q})$ es ortogonal a $\vec{F}_T(\vec{q})$, es decir, es normal a la superficie K en $\vec{q}$. De estas dos componentes, la que proporciona información sobre el flujo es $\vec{F}_N(\vec{q})$, que es la que está atravesando la superficie (ver Figura 3.10).

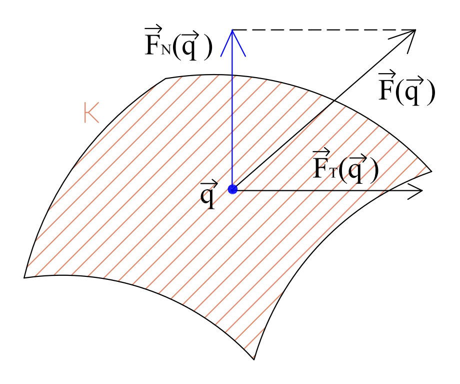


Figura 3.10: Componente normal del campo $\vec{F}$.

De hecho nos interesa su módulo $F_N(\vec{q})$:

$$F_N(\vec{q}) = proy_{\vec{N}}\vec{F}(\vec{q}) = \vec{F}(\vec{q}) \cdot \vec{N}(\vec{q})$$

puesto que

$$proy_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{v^2} v \qquad \text{y} \qquad \left\| \vec{N} \right\| = 1.$$

Si $\vec{N}(\vec{q})$ es el vector que nos define la orientación de K, tomamos como "lado exterior" el lado hacia el que apunta dicho vector. Así, diremos que:

El flujo sale de K si $\vec{F}_N(\vec{q})$ y $\vec{N}(\vec{q})$ coinciden en sentido; si tienen sentido opuesto, diremos que el flujo entra en K (ver Figura 3.11).

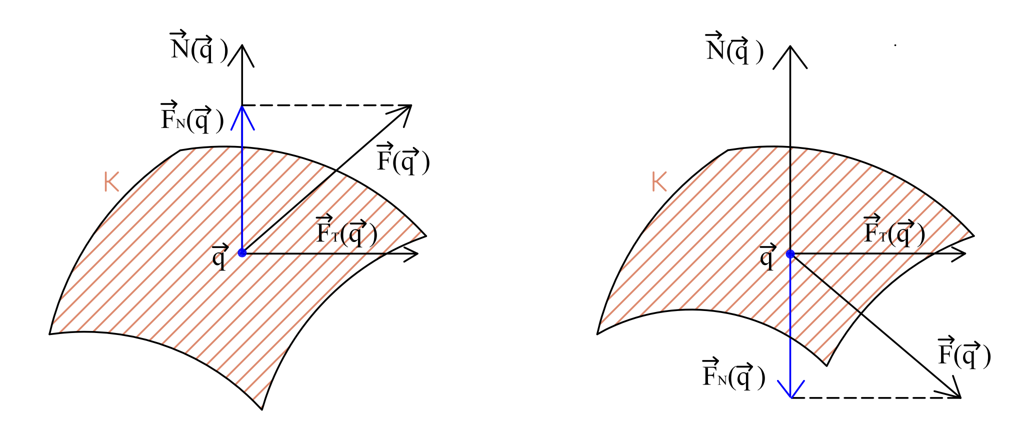


Figura 3.11: (a) Flujo que sale de K. (b) Flujo que entra en K.

Veamos cómo obtener el flujo de un campo $\vec{F}$ a través de una superficie K.

Sea una superficie paramétrica $K = \vec{\Phi}(D)$, donde $\vec{\Phi} : D \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización de K con la orientación de K definida por el campo continuo $\vec{N} : K \to \mathbb{R}^3$:

- Tomemos una partición de D en $n \times n$ rectángulos R_{ij}^D, las imágenes de cada uno de ellos, R_{ij}^K, proporcionan una partición de la superficie K.
- Sea $\vec{p}_{ij}$ un punto cualquiera de R_{ij}^D y consideremos su imagen $\vec{q}_{ij} = \vec{\Phi}(\vec{p}_{ij})$.
- Una estimación aproximada del flujo del campo $\vec{F}$ a través del rectángulo R_{ij}^K se obtiene al multiplicar $F_N(\vec{q}_{ij})$ por el área de R_{ij}^K:

$$\text{Flujo a través de } R_{ij}^K \approx F_N(\vec{q}_{ij})\text{área}(R_i^K) = (\vec{F}(\vec{q}_{ij}) \cdot \vec{N}(\vec{q}_{ij}))\ \text{área}(R_i^K),$$

es decir,

$$\text{Flujo a través de } R_{ij}^K \approx (\vec{F}(\vec{\Phi}(\vec{p}_{ij})) \cdot \vec{N}(\vec{\Phi}(\vec{p}_{ij})))\ \left\| \vec{N}_{\vec{\Phi}}(\vec{p}_{ij}) \right\| \Delta u\ \Delta v.$$

- Por tanto, una aproximación del flujo de $\vec{F}$ a través de K viene dada por,

$$\text{Flujo a través de } K \approx \sum_{i,j=1}^{n} (\vec{F}(\vec{\Phi}(\vec{p}_{ij})) \cdot \vec{N}(\vec{\Phi}(\vec{p}_{ij}))) \left\| \vec{N}_{\vec{\Phi}}(\vec{p}_{ij}) \right\| \Delta u \, \Delta v,$$

que es una suma de Riemann sobre D.

- Tomando límites cuando las áreas de los rectángulos de la partición de D tienden a 0, tenemos:

$$\text{Flujo a través de } K = \iint_D (\vec{F}(\vec{\Phi}(u,v)) \cdot \vec{N}(\vec{\Phi}(u,v))) \left\| \vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v) \right\| dudv.$$

Puesto que el producto $(\vec{F}(\vec{\Phi}(u,v)) \cdot \vec{N}(\vec{\Phi}(u,v)))$ constituye una función escalar, esta integral se reduce a una integral de superficie de una función escalar.

Definición 3.16. Sea $K = \vec{\Phi}(D)$ una superficie regular simple parametrizada por $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con la orientación definida por el campo de vectores normales $\vec{N} : K \to \mathbb{R}^3$. Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo definido en un abierto U que contiene a K. Se define la **integral de superficie** del campo $\vec{F}$ sobre K (o también **flujo** de $\vec{F}$ a través de K) como:

$$\iint_K \vec{F} d\vec{S} = \iint_K \vec{F} \cdot \vec{N} \; dS = \iint_D (\vec{F}(\vec{\Phi}(u,v)) \cdot \vec{N}(\vec{\Phi}(u,v))) \left\| \vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v) \right\| dudv.$$

Si se toma la orientación inducida por la parametrización, es decir, si se considera

$$\vec{N}(\vec{q}) = \frac{\vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v)}{\left\| \vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v) \right\|}, \qquad \text{para } \vec{q} = \vec{\Phi}(u,v),$$

entonces:

$$\iint_{K_{\vec{\Phi}}} \vec{F} d\vec{S} = \iint_D (\vec{F}(\vec{\Phi}(u,v)) \cdot \vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v)) du \, dv.$$

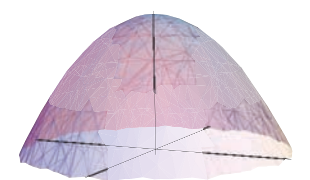
También se aplica el término flujo de $\vec{F}$ a través de K cuando $\vec{F}$ representa un campo magnético o eléctrico.

Las integrales de superficie también se aplican al estudio de flujo de calor. Si $T(x,y,z)$ es la temperatura en un punto (x,y,z), siendo T una función de clase $\mathcal{C}^1$, entonces el calor fluye según el campo vectorial:

$$\vec{F} = -k\vec{\nabla}T, \; k > 0.$$

Por tanto, $\iint_K \vec{F} d\vec{S}$ es la tasa total de flujo de calor o flujo a través de K.

Ejemplo 3.42. Sea K la parte de paraboloide $z = 1 - (x^2 + y^2)$ que está encima del disco unidad D. Calculemos el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de esta superficie en la dirección de la normal unitaria superior.



Superficie K.

Solución. Una parametrización para K es:

$$\vec{\Phi}: D \to \mathbb{R}^3,\ \vec{\Phi}(u,v) = (u, v, 1-(u^2+v^2))$$

siendo $D = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 1\}$. Entonces, $\vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v) = (2u, 2v, 1)$ y se tiene que

$$\vec{N}(\vec{q}) = \frac{\vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v)}{\left\|\vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v)\right\|} = \frac{(2u,2v,1)}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}.$$

Calculando $\vec{N}$ o $\vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v)$ sobre algún punto de la superficie comprobamos que está orientado en la dirección de la normal unitaria superior. Por ejemplo, en $\vec{q} = (0,0,1) = \vec{\Phi}(0,0)$ se tiene que $\vec{N}_{\vec{\Phi}}(0,0) = (0,0,1)$. Entonces el flujo en esta dirección vendrá dado por:

$$\begin{aligned}
\text{flujo} &= \iint_{K_{\vec{\Phi}}} \vec{F} d\vec{S} = \iint_D (\vec{F}(\vec{\Phi}(u,v)) \cdot \vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v)) dudv \\
&= \iint_D (u, v, 1-u^2-v^2) \cdot (2u, 2v, 1)\ dudv = \iint_D (u^2+v^2+1) dudv \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1+r^2) r\, dr\, d\theta = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}) = \frac{3\pi}{2}. \blacksquare
\end{aligned}$$

⬣ **Ejemplo 3.43.** Calculemos el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,0)$ saliendo de la esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$.

Solución. Podemos tomar como vector unitario apuntando hacia el exterior de la esfera, el vector

$$\vec{N}(x,y,z) = \frac{1}{a}(x,y,z).$$

Entonces,

$$\text{flujo} = \iint_K \vec{F} d\vec{S} = \iint_K \vec{F} \cdot \vec{N}\ dS.$$

Como $\vec{F} \cdot \vec{N} = (x,y,0) \cdot (x,y,z)\frac{1}{a} = \frac{1}{a}(x^2+y^2)$, integraremos, sobre K, la función escalar $f(x,y,z) = \frac{1}{a}(x^2+y^2)$.

Tomemos la parametrización

$\vec{\Phi} : D \to \mathbb{R}^3$, $\vec{\Phi}(u,v) = (a\cos u \sin v,\ a\sin u \sin v,\ a\cos v)$ con $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. En este caso, $\left\| \vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v) \right\| = a^2 \left| \sin v \right|$, entonces,

$$\text{flujo} = \iint_D \frac{1}{a}(a^2 \sin^2 v) a^2 \sin v \, du\, dv = a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 v\, dv\, du$$
$$= 2\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^3 v\, dv = 2\pi a^3 \left[\frac{1}{3}\cos^3 v - \cos v \right]_0^{\pi} = 2\pi a^3 (2 - \frac{2}{3}) = \frac{8}{3}\pi a^3. \blacksquare$$

Ejemplo 3.44. Sea K la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientada con la normal exterior. Supongamos que la temperatura en cada punto de K viene dada por $T(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Hallemos el flujo de calor a través de K si $k = 1$.

Solución. Tenemos que

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} T(x,y,z) = (-2x, -2y, -2z).$$

Tomando el vector unitario apuntando hacia el exterior $\vec{N}(x,y,z) = (x,y,z)$, tenemos:

$$\text{flujo} = \iint_K \vec{F} d\vec{S} = \iint_K \vec{F} \cdot \vec{N} dS = \iint_K -2\ dS = -2A(K) = -8\pi.$$

Que el flujo salga negativo indica que el calor fluye en sentido contrario al vector $\vec{N}$, es decir, entra en la esfera. $\blacksquare$

3.4.6. Ejercicios de la sección 3.4

1. Calcula el área de la superficie K formada por el trozo de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que queda por encima del plano $z = 3$ y el trozo de plano $z = 3$ que forma la tapa. (solución: 15π u.a.).

2. Calcula la masa de una lámina que viene dada por la superficie del tetraedro de caras $z = 0$, $y = 0$, $x + z = 1$ y $y = x$ y cuya densidad en cada punto del tetraedro es $\rho(x,y,z) = x\,y$. (Solución: $\frac{\sqrt{2}}{8}$ u.m.).

3. Halla la temperatura media de la superficie $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \geq 0$ siendo la temperatura en cada punto proporcional a su distancia al plano xy. (Solución: $\frac{2}{3}k$).

4. Calcula las coordenadas del centro de masa de la superficie parabólica $K = \vec{\Phi}(D)$, $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con $D = \{(u,v)/u^2 + v^2 \leq 1\}$, $\vec{\Phi}(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$, suponiendo que se trata de un cuerpo homogéneo. (Solución: $(0, 0, 0{,}5589)$).

5. Sea K la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que se encuentra por debajo del plano $z = 2$. Calcula su masa total si la densidad en cada punto de la esfera es igual a la distancia de dicho punto al plano XY. (Solución: 80π u.m.).

6. Halla la densidad media de la lámina del Ejercicio 3.19. (Solución: $\frac{1}{2}$ gr/cm^2).

7. Calcula el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (3z,-4,4y)$ a través de la superficie K utilizando el vector normal unitario orientado hacia Z^+, siendo K el trozo del plano $x+y+z=1$ en el primer octante.(Solución: $\dfrac{-5}{6}$).

8. Halla la masa del trozo de cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ que queda por debajo del plano $z = 2$ si la densidad en cada punto es igual a su distancia al plano XY (gr/cm^2). (solución: $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ gr).

9. Calcula el flujo total del campo $\vec{F}(x,y,z) = (xy, 4yz^2, yz)$ saliendo del cubo unidad $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$. (Solución: $\frac{7}{3}$).

10. Calcula el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (3z,-4,y)$ a través de la superficie dada por el trozo de cilindro parabólico $z = 1-y^2$ cortado por los planos $x = 0$ y $y = x$, situada en el primer octante. Dibuja en qué dirección atraviesa el campo dicha superficie. (Solución: $-\frac{7}{3}$).

11. Calcula el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (-y,x,z)$ a través de la superficie K, siendo K la porción del paraboloide $z = 16-(x^2+y^2)$ cortada por el cilindro $x^2+(y-1)^2 = 1$. (Solución: $\frac{29}{2}\pi$).

12. Calcula el flujo del campo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x+y+z, xyz, \sqrt{x^2+y^2})$ a través de la porción del plano $2y+z=3$ que queda dentro de $z = 3-x^2-y^2$. Indica la dirección del flujo. (Solución: $\frac{32}{9}$).

13. Calcula el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (y,-x,-z)$ a través de la superficie K, siendo K la porción del cono $3-\sqrt{x^2+y^2}$ comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = 2$. Razona hacia dónde se dirige el flujo. (Solución: $-\frac{20}{3}\pi$).

14. Calcula el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (2x,y,2z)$ a través de la superficie K,definida por el paraboloide $z = 4-x^2-y^2$ que queda comprendido entre los planos $z = 1$ y $z = 3$. (Solución: 20π).

3.5. TEOREMA DE STOKES Y TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

3.5.1. Teorema de Stokes

El teorema de Stokes constituye una generalización a $\mathbb{R}^3$ del teorema de Green. Este teorema establece la relación entre la integral de línea de un campo $\vec{F}$ a lo largo de la frontera de una superficie K y la integral de superficie sobre K de un cierto campo vectorial, llamado campo rotacional de $\vec{F}$. Leyes como la de Ampère y la de Faraday son consecuencia del teorema de Stokes.

■ **Definición 3.17.** Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable definido en el abierto U de $\mathbb{R}^3$, $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Se define el **rotacional** de $\vec{F}$ en un punto $\vec{p} \in U$, denotado por rot $\vec{F}(\vec{p})$, al vector:

$$\text{rot}\vec{F}(\vec{p}) = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})$$

donde las parciales de las componentes de $\vec{F}$ se evalúan en el punto $\vec{p}$.

Esta definición nos permite hablar del campo rotacional:

$$\text{rot } \vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Para entender cómo actúa el campo rotacional sobre un punto basta imaginarnos el desagüe de un fregadero y observar el movimiento de unas aspas en el agua al caer en él. Si las aspas no giran el rotacional es cero.

El rotacional se puede calcular del siguiente modo:

$$\text{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

donde $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ y se le llama operador nabla.

Es inmediato que si un campo es conservativo entonces su rotacional es siempre cero, es decir, es un campo irrotacional. La implicación contraria no se verifica a menos que el dominio U del campo sea un conjunto simplemente conexo.

⬢ **Ejemplo 3.45.** Hallemos el rotacional del campo $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{F}(x, y, z) = (3xy, x^2 + 2y + z,\ x - yz).$$

Solución.

$$\text{rot}\vec{F}(\vec{p}) = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 3xy & x^2 + 2y + z & x - yz \end{vmatrix} = (-z - 1, -1, -x). \blacksquare$$

Antes de enunciar el teorema de Stokes tenemos en cuenta las siguientes consideraciones:

- Dada una superficie $K = \vec{\Phi}(D)$ parametrizada por la función $\vec{\Phi}$, para que se verifique el teorema deberemos tomar la orientación que esta parametrización proporciona.
- La región D ha de verificar el teorema de Green.
- Si $\vec{\sigma}$ un camino seccionalmente $\mathcal{C}^1$ que parametriza a ∂D^+, es decir, parametriza la frontera de D orientada positivamente entonces la composición $\vec{\mu} = \vec{\Phi} \circ \vec{\sigma}$ es un camino seccionalmente $\mathcal{C}^1$ que parametriza a ∂K^+.

■ **Teorema 3.4** (Teorema de Stokes)**.** Sea K una superficie regular simple orientable parametrizada por la función $\vec{\Phi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^2$ que proporciona una orientación de K y sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contenga a K. Entonces:

$$\int_{\partial K^+} \vec{F}\, d\vec{\mu} = \iint_{K_{\vec{\Phi}}} \text{rot}\vec{F}\, d\vec{S}.$$

El teorema de Stokes puede aplicarse a superficies seccionalmente simples, como se verá en algunos de los ejemplos que mostraremos.

■ **Nota 3.9.** La orientación de la superficie $K_{\vec{\Phi}}$ y la orientación de su frontera ∂K^+, como muestra la Figura 3.12, responden a la regla de la mano derecha, dependiendo de la orientación que nos da la parametrización de la superficie.

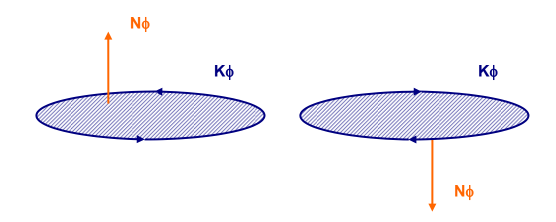
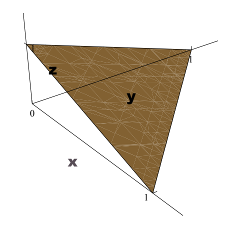


Figura 3.12: Orientación superficie positiva de ∂K^+.

⬢ **Ejemplo 3.46.** Sea $\vec{F}$ el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (xy, 2xz, 3yz)$ y sea K la porción del plano $x + y + z = 1$ en el primer octante. Comprobemos que se cumple el teorema de Stokes.



Plano $x + y + z = 1$.

Solución. Tenemos que $\vec{F}$ es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en $\mathbb{R}^3$ y K es una superficie regular simple orientable.

Consideremos la parametrización $\vec{\Phi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$\vec{\Phi}(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$$

de clase $\mathcal{C}^2$, con

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1,\ \ 0 \leq v \leq 1 - u\}.$$

En este caso, $\vec{N}_{\vec{\Phi}} = (1,1,1)$ nos da la orientación requerida. El camino que parametriza a ∂K^+ viene dado por $\vec{\mu} = \vec{\Phi} \circ \vec{\sigma}$, siendo $\vec{\sigma}$ el camino que parametriza a ∂D^+. Así, se obtiene que $\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 + \vec{\mu}_3$, con

$$\begin{aligned} &\vec{\mu}_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ \vec{\mu}_1(t) = (t, 0, 1-t) \\ &\vec{\mu}_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ \vec{\mu}_2(t) = (1-t, t, 0) \\ &\vec{\mu}_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ \vec{\mu}_3(t) = (0, 1-t, t) \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\partial K^+} \vec{F} d\vec{\mu} = \int_{\vec{\mu}_1} \vec{F} d\vec{s} + \int_{\vec{\mu}_2} \vec{F} d\vec{s} + \int_{\vec{\mu}_3} \vec{F} d\vec{s} = \int_0^1 (0, 2t(1-t), 0) \cdot (1, 0, -1) dt + \\ \int_0^1 ((1-t)t, 0, 0) \cdot (-1, 1, 0) dt + \int_0^1 (0, 0, 3t(1-t)) \cdot (0, -1, 1) dt \\ = \int_0^1 -t(1-t) dt + \int_0^1 3t(1-t) dt = \int_0^1 2t(1-t) dt \\ = 2 \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Comprobemos el teorema calculando la integral de superficie del campo $\text{rot}\vec{F}$ sobre K.

$$\text{rot}\vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy & 2xz & 3yz \end{vmatrix} = (3z - 2x, 0, 2z - x)$$

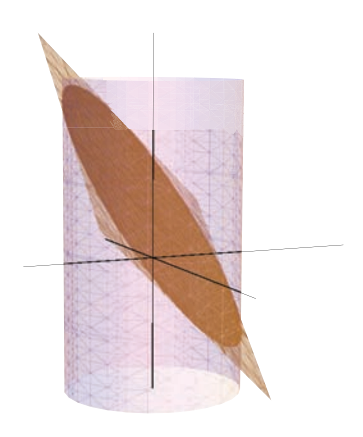
entonces,

$$\begin{aligned} \int\int_{K_{\vec{\Phi}}} \text{rot}\vec{F}\, d\vec{S} &= \iint_D (\text{rot}\vec{F}(\vec{\Phi}(u,v)) \cdot \vec{N}_{\vec{\Phi}}(u,v)) du dv \\ &= \iint_D (3(1-u-v) - 2u, 0, 2(1-u-v) - u) \cdot (1,1,1) du dv \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-u} (5 - 8u - 5v)\, dv\, du = \int_0^1 \left[5v - 8uv - \frac{5v^2}{2} \right]_0^{1-u} du \\ &= \int_0^1 (5(1-u) - 8u(1-u) - \frac{5(1-u)^2}{2})\, du = \frac{1}{3}. \blacksquare \end{aligned}$$

⬢ **Ejemplo 3.47.** Utilizando el teorema de Stokes, evaluemos la integral de línea

$$\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$$

donde C es la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$ y la orientación de C corresponde al sentido antihorario en el plano XY.



Intersección plano y cilindro.

Solución. Tomando el campo $\vec{F}(x,y,z) = (-y^3, x^3, -z^3)$ de clase $\mathcal{C}^1$ definido en $\mathbb{R}^3$, tenemos que

$$\int_C -y^3dx + x^3dy - z^3dz = \int_C \vec{F}d\vec{s}.$$

La curva C es la frontera de la superficie K definida por la gráfica de la función $f(x,y) = 1 - x - y$ sobre la región $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, por tanto K es una superficie regular simple orientable cuya parametrización $\vec{\Phi}(u,v) = (u, v, 1-u-v)$ es de clase $\mathcal{C}^2$. Por tanto, podemos aplicar el teorema de Stokes y se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}d\vec{s} &= \int\int_{K_{\vec{\Phi}}} rot\vec{F}\,d\vec{S} = \int\int_D (0,0,3u^2+3v^2)\cdot(1,1,1)\,du\,dv \\ &= \int\int_D (3u^2+3v^2)\,du\,dv = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\,r\,dr\,d\theta \\ &= 3\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta = \frac{3}{4}2\pi = \frac{3\pi}{2}. \blacksquare\end{aligned}$$

3.5.2. Teorema de la divergencia

El teorema de la divergencia es una generalización del teorema de Green pero de forma distinta al teorema de Stokes ya que relaciona una integral de superficie de una campo vectorial sobre una superficie cerrada K con una integral triple de la divergencia de dicho campo sobre la región sólida que encierra dicha superficie.

Introducimos el concepto de divergencia de una campo vectorial.

La divergencia de un campo $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una medida del flujo del campo por unidad de volumen en cada punto $\vec{p} \in U$. La divergencia de un campo en un punto $\vec{p}$ nos da una idea de cómo el fluido tiende a acumularse en la proximidad de $\vec{p}$ (si la divergencia en p es negativa) o a alejarse de $\vec{p}$ (si es positiva).

Si $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$, la divergencia se calcula como sigue:

$$div\vec{F}(\vec{p}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Es decir,
$$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}.$$

El teorema de la divergencia para campos en $\mathbb{R}^3$ relaciona la integral de superficie de un campo $\vec{F}$ sobre una superficie cerrada K con la integral triple de $div\vec{F}$ sobre la región Ω encerrada por K. Las superficies consideradas serán fronteras de regiones $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ que sean de los tres tipos estudiados en el segundo tema, a las que llamamos regiones elementales. Se tiene entonces el siguiente teorema, que generaliza al que se vio en el caso del plano:

■ **Teorema 3.5** (Teorema de la divergencia)**.** Sea Ω una región elemental de $\mathbb{R}^3$ y sea K la frontera de Ω orientada con sus vectores normales apuntando hacia su exterior y parametrizada por la función $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Si $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto U que contenga a Ω, entonces:
$$\int\int_K \vec{F} d\vec{S} = \int\int\int_\Omega \text{div } \vec{F} dx\, dy\, dz.$$

Este teorema se puede extender a regiones más generales que se puedan dividir en varias subregiones elementales, como es el caso de regiones limitadas por dos superficies cerradas, una dentro de otra.

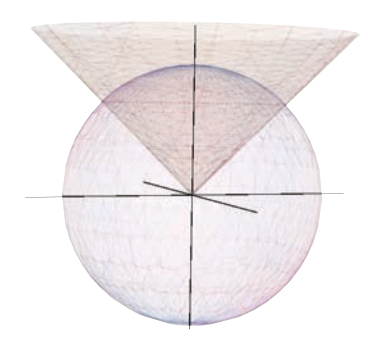
Podemos interpretar el teorema de la forma siguiente: el flujo neto de un campo saliendo a través de una superficie cerrada se puede calcular al integrar la divergencia del campo sobre la región sólida que encierra. Por ejemplo, la ley de Gauss establece que el flujo eléctrico del campo $\vec{E}$ hacia el exterior de una superficie cerrada es igual a la carga total Q en el interior de dicha superficie.

■ **Nota 3.10.** Si al calcular el flujo saliendo se obtiene un valor negativo, significa que el flujo va en sentido contrario, es decir, entra a través de dicha superficie.

⬣ **Ejemplo 3.48.** Dado el campo constante $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (\alpha, \beta, \gamma)$, demostremos que el flujo de $\vec{F}$ a través de una superficie K cerrada es 0.

Solución. Un campo constante tiene $div\vec{F}(\vec{p}) = 0$. Si K es una superficie cerrada, será frontera de una región Ω y entonces, puesto que $\vec{F}$ es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en $\mathbb{R}^3$, podemos aplicar el teorema de la divergencia y se tiene que:
$$\int\int_K \vec{F} d\vec{S} = \int\int\int_\Omega \text{div } \vec{F}\, dx\, dy\, dz = \int\int\int_\Omega 0\, dx\, dy\, dz = 0. \blacksquare$$

⬣ **Ejemplo 3.49.** Sea K la frontera de la región limitada inferiormente por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Dado el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (4xy, xz, 4yz + z)$, calculemos el flujo que sale a través de la superficie K.



Región encerrada por la esfera y el cono.

Solución. Puesto que K es una superficie cerrada y el campo vectorial dado es de clase $\mathcal{C}^1$ definido en $\mathbb{R}^3$, podemos calcular el flujo a través de S hacia el exterior aplicando el teorema de la divergencia, entonces:

$$\text{Flujo saliendo de } K = \int\int_K \vec{F} d\vec{S} = \int\int\int_\Omega div\vec{F} dxdydz,$$

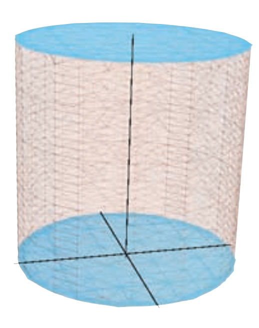
siendo Ω la región de $\mathbb{R}^3$ limitada por K. Tomemos coordenadas esféricas para definir la región Ω :

$$\Omega = \{(r, \theta, \phi) : 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}\}.$$

La divergencia de este campo es $div\vec{F}(\vec{p}) = 8y + 1$, por tanto:

$$\begin{aligned}
\int\int\int_\Omega div\vec{F} dxdydz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 (8r \sin\theta \sin\phi + 1)\, r^2 \sin\phi\, dr\, d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (8 \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 \sin\theta \sin^2\phi + \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 \sin\phi)\, d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (32 \sin\theta \sin^2\phi + \frac{8}{3} \sin\phi)\, d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-32 \left[\cos\theta\right]_0^{2\pi} \sin^2\phi + \frac{8}{3} \sin\phi \left[\theta\right]_0^{2\pi})\, d\phi \\
&= \frac{8}{3} 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\phi\, d\phi = \frac{16\pi}{3} \left[-\cos\phi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{8(2 - \sqrt{2})\pi}{3}. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.50. Calculemos $\int\int_K \vec{F} d\vec{S}$ siendo $\vec{F}(x, y, z) = (x^3, x^2y, x^2z)$ y K la superficie que consta del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y los discos circulares definidos por: $z = 0$ y $z = b$ con $x^2 + y^2 \leq a^2$.



Región encerrada por el cilindro y los planos.

Solución. La divergencia de este campo es $div\vec{F}(\vec{p}) = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2$.

Puesto que el campo vectorial es de clase $\mathcal{C}^1$ definido en $\mathbb{R}^3$ y la superficie es una superficie cerrada frontera de la región de tipo I

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq b\}, \text{ con } D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\},$$

aplicamos el teorema de la divergencia y el flujo a través de la superficie, hacia el exterior, es:

$$\begin{aligned}
\int\int_K \vec{F} d\vec{S} &= \int\int\int_\Omega div\vec{F} dxdydz = \int\int\int_\Omega 5x^2 dxdydz \\
&= \int\int_D \int_0^b 5x^2 dz\, dx\, dy = \int\int_D 5x^2 \left[z\right]_0^b\, dx\, dy \\
&= 5b \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \cos^2\theta\, r\, dr\, d\theta = 5b \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a \cos^2\theta\, dr\, d\theta \\
&= \frac{5ba^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{5ba^4}{8} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{5\pi ba^4}{4}. \blacksquare
\end{aligned}$$

⬣ **Ejercicio 3.21.** Comprueba el resultado del ejemplo anterior calculando la integral de superficie.

3.5.3. Ejercicios de la sección 3.5

1. Halla la tasa de flujo del volumen de gases que pasan a través de la superficie de un globo aerostático (esfera truncada cuya frontera es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$) si los gases escapan por su cubierta con un campo de velocidades $\vec{V}(x, y, z) = \vec{\nabla} \times \vec{F}(x, y, z)$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 1)$. (Solución: 2π).

2. Halla el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x + e^{yz}, 2y - x^2z, 4z + y^2x + x^3)$ que entra en la superficie frontera de la región sólida encerrada por $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y $z^2 = 3x^2 + 3y^2$. (Solución: $-\frac{686(2-\sqrt{3})}{3}\pi$).

3. Para el campo $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z)$, calcula el flujo de $\vec{F}$ saliendo de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (Solución: $\dfrac{44\pi}{15}$).

4. Verifica que se cumple el teorema de Stokes para la superficie K formada por el trozo de paraboloide $z = 2 - (x^2 + y^2)$ que queda por encima del plano $z = 1$, en el primer octante, y para el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (-z^2,\ xy,\ -2xz)$. (Solución: $\frac{1}{3}$).

5. Calcula el flujo del rotacional del campo $\vec{F}(x, y, z) = (z - y, z, x\,y)$ a través de la superficie K definida por el trozo de paraboloide $z = x^2 + y^2$ que queda por encima del rectángulo $R = [-2, 2] \times [-2, 2]$. Verifica que se cumple el teorema de Stokes. (Solución: 16).

6. Calcula el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x\,y, y\,z^2, z\,x^2)$ que sale a través de la superficie S frontera del sólido limitado por los cilindros $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ y los planos $z = 0$ y $z = 2$. (Solución: $\frac{235}{3}\pi$).

7. Sea K la porción de paraboloide $z = x2x^2 + 2y^2$ que queda dentro del cilindro $x^2 + y^2 - y = 0$. Si $\vec{G} = \text{rot}\vec{F}$, siendo el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, -y)$, calcula el flujo de $\vec{G}$ a través de la superficie K aplicando el teorema de Stokes. (Solución: $-\frac{\pi}{4}$).

8. Verifica el teorema de la divergencia para el campo $\vec{F}(x, y, z) = (xy,\ xz,\ yz)$ y la superficie formada por los planos coordenados y la porción del plano $x + y + z = 1$ que se encuentra en el primer octante. (Solución: $\frac{1}{12}$).

9. Usa el teorema de Stokes para calcular la integral de línea $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$,siendo

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\arctan \frac{x}{y}, \ln \sqrt{x^2 + y^2}, 1\right)$$

y C: triángulo de vértices $(0, 0, 0)\,, (0, 0, 2)\,, (1, 1, 1)$. (Solución: 0).

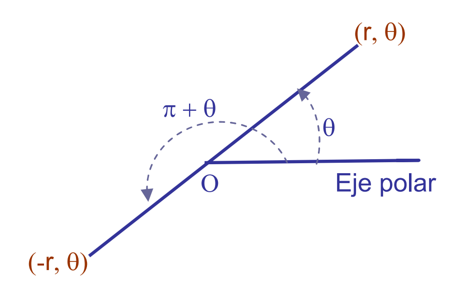
10. (a) Halla el volumen encerrado por la superficie cerrada K formada por el trozo de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que queda por debajo del plano $z = 3$ y el trozo de plano $z = 3$ que forma la tapa.(Solución: $\frac{245}{3}\pi$).
(b) Calcula el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x,\ y,\ z)$ entrando por dicha superficie. (Solución: -245π).

11. (a) Calcula la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (-y, y\,z, x\,y)$ a lo largo de la curva definida por la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ y el plano $z = 1$, indicando el sentido de recorrido elegido.
(b) Verifica que se cumple el teorema de Stokes calculando la integral anterior mediante una integral de superficie.
(Solución: 3π en sentido antihorario y -3π en sentido horario).

Apéndice A

GRÁFICAS EN COORDENADAS POLARES

Consideremos un sistema de referencia formado por un punto fijo del plano llamado polo al que designamos por O, y una semirrecta que parte de él, llamada eje polar.



Sistema de referencia en coordenadas polares.

Un punto del plano está representado en coordenadas polares por (r, θ) si dicho punto está a una distancia $|r|$ del polo sobre la semirrecta θ si $r > 0$ y sobre la semirrecta $\pi + \theta$ si $r < 0$.

Las coordenadas polares no son únicas, los pares $(r, \theta) = (r, \theta + 2k\pi)$ representan un mismo punto $\forall k \in \mathbb{Z}$.

El polo O viene representado por el par $(0, \theta)$ y si tenemos radios negativos consideramos $(-r, \theta) = (r, \pi + \theta)$ convirtiendo de esta manera el valor del radio en positivo.

La relación entre las coordenadas polares (r, θ) y las coordenadas rectangulares (x, y) viene dada por las expresiones siguientes:

$$x = r\,\cos\theta, \qquad y = r\,\sin\theta;$$

y la transformación inversa:

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Representación gráfica de funciones en coordenadas polares

Para representar la gráfica de una función en coordenadas polares $r = \varphi(\theta)$ podemos seguir los pasos siguientes:

(1) **Representación gráfica** de la función trigonométrica si aparece en la expresión $r = \varphi(\theta)$ sobre el eje de coordenadas cartesianas.

(2) **Simetrías:**

Si $\varphi(-\theta) = \varphi(\theta)$ hay simetría respecto del eje polar.

Si $\varphi(\pi - \theta) = \varphi(\theta)$ hay simetría respecto de la recta $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Si $\varphi(\pi + \theta) = \varphi(\theta)$ hay simetría respecto del polo.

(3) **Paso de la gráfica por el polo:**
Teniendo en cuenta que en el polo el radio vale cero, para hallar el paso de la función por el polo calcularemos los valores del ángulo φ tales que $r = \varphi(\theta) = 0$.

(4) **Valores máximos y mínimos del radio:**
Los valores máximos y mínimos del radio corresponden a los valores de φ tales que $r' = \varphi'(\theta) = 0$.

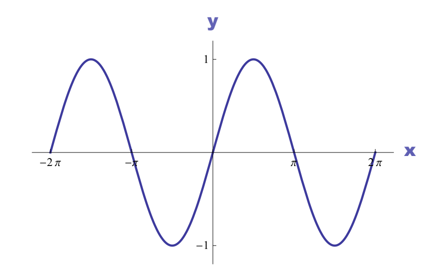
(5) **Tramos de representación:**
Con los valores de φ obtenidos en los dos últimos apartados (3) y (4) se toman los intervalos de construcción de la gráfica y en cada uno de ellos se estudia si el valor del radio r crece o decrece.

(6) **Representación gráfica:**
Por último se representa la gráfica con la información obtenida.

⬣ **Ejemplo A.1.** Representemos gráficamente la cardiode $r = \varphi(\theta) = 1 + \sin\theta$.

Solución.

(1) Representamos la función seno en coordenadas cartesianas.



Función $\sin x$.

(2) Simetrías.

- $\varphi(-\theta) = 1 + \sin -\theta = 1 - \sin\theta$, no hay simetría respecto del eje polar.
- $\varphi(\pi - \theta) = 1 + \sin \pi - \theta = 1 + \sin\theta$, existe simetría respecto de $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.
- $\varphi(\pi + \theta) = 1 + \sin \pi + \theta = 1 - \sin\theta$, no hay simetría respecto del polo.

(3) Paso de la gráfica por el polo.

$r = 0 \implies 1 + \sin\theta = 0 \implies \sin\theta = -1 \implies \theta = \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{2}, \cdots$

(4) Valores máximos y mínimos del radio.

$r' = 0 \implies \cos\theta = 0 \implies \theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{2}, \cdots$

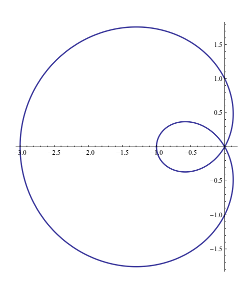
(5) Tramos de representación.

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ el radio crece pasando del punto $(0, 1)$ al punto $(\frac{\pi}{2}, 2)$,

$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ el radio decrece pasando del punto $(\frac{\pi}{2}, 2)$ al punto $(\frac{3\pi}{2}, 0)$,

$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ el radio crece pasando del punto $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ al punto $(2\pi, 2)$.

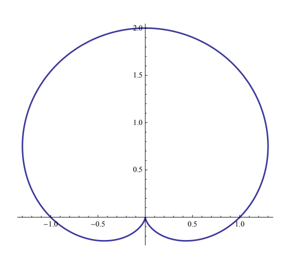
(6) Representación gráfica.



Cardiode $r = \varphi(\theta) = 1 - 2\cos\theta$.

Ejercicio A.1. Dibuja la gráfica de la cardiode $r = 1 - 2\cos\theta$.

Solución:

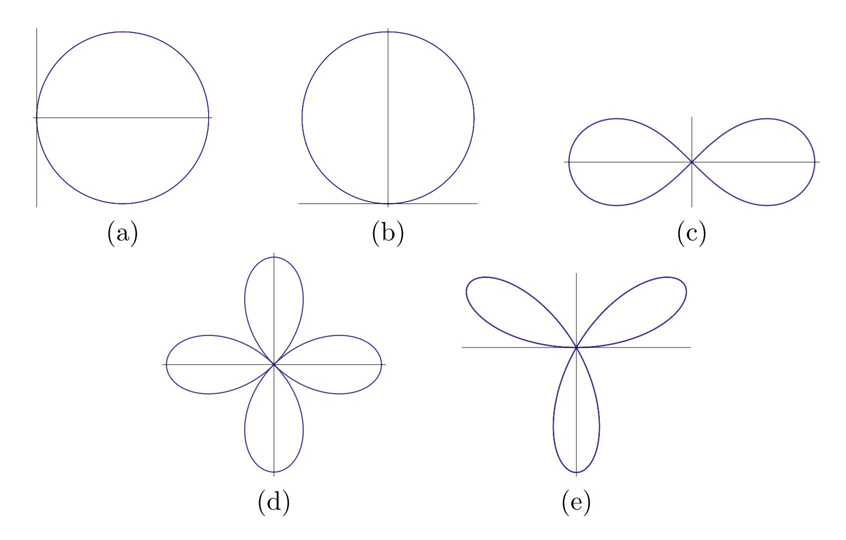


Cardiode $r = \varphi(\theta) = 1 + \sin\theta$

Ejercicio A.2. Representa gráficamente las funciones dadas en coordenadas polares que se dan a continuación.

a) $r = 3\cos\theta$. b) $r = 2\sin\theta$.
c) $r^2 = \cos 2\theta$ (lemniscata). d) $r = 3\cos 2\theta$ (rosa de cuatro pétalos).
e) $r = \sin 3\theta$ (rosa de tres pétalos).

Solución.

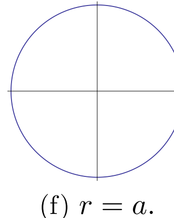


Curvas en coordenadas polares.

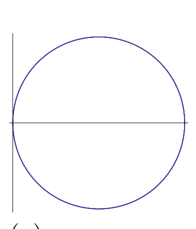
Resumen de las gráficas en coordenadas polares

✔ Circunferencias.

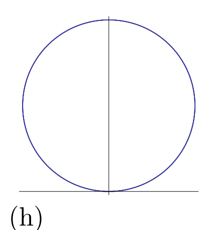
- Si tienen el centro en el origen de coordenadas y radio $a > 0$: $r = a$.
- Si tienen el centro en el eje de las X y radio a: $r = 2a\cos\theta$.
- Si tienen el centro en el eje de las Y y radio a: $r = 2a\sin\theta$.



(f) $r = a$.



(g) $r = 2a\cos\theta$.



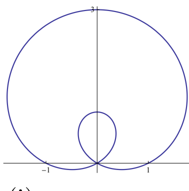
(h) $r = 2a\sin\theta$.

Circunferencias.

✔ Cardiodes. Las funciones en coordenadas polares de una cardiode son:

$$r = a + b\,\sin\theta; \qquad r = a + b\,\cos\theta.$$

- Si $|a| > |b|$: la cardiode no pasa por el polo.
- Si $|a| < |b|$: la cardiode tiene rizo interior.



(i) $r = 1 + 2\sin\theta$.

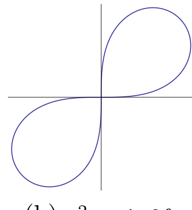
(j) $r = 1 + \cos\theta$.

Cardiodes.

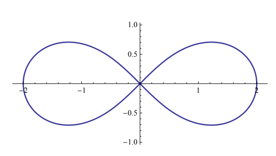
✔ Lemniscatas. Las funciones que determinan las lemniscatas son:

$$r^2 = a\ \sin 2\theta \qquad \text{o bien} \qquad r^2 = a\ \cos 2\theta$$

siendo $a > 0$.



(k) $r^2 = \sin 2\theta$.



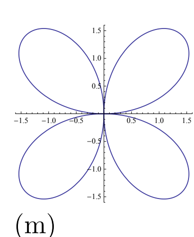
(l) $r^2 = 4\ \cos 2\theta$.

Lemniscatas.

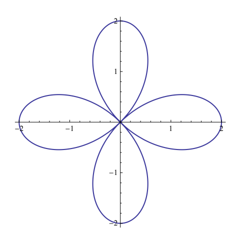
✔ Curvas de pétalos. Las funciones que determinan las curvas de pétalos son:

$$r = a\ \sin n\theta \qquad \text{o bien} \qquad r = a\ \cos n\theta, \qquad\qquad n \in \mathbb{Z}, a > 0.$$

- Si n es par tiene $2n$ pétalos.



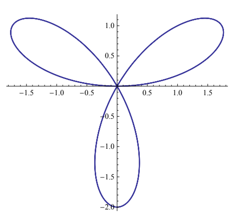
(m) $r = 2\sin 2\theta$.

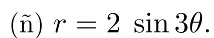


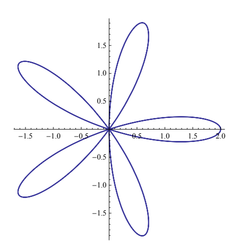
(n) $r = 2\ \cos 2\theta$.

Curvas de 4 pétalos .

- Si n es impar tiene n pétalos.




(ñ) $r = 2\ \sin 3\theta$.


(o) $r = 2\ \cos 5\theta$.

Curvas de 3 y 5 pétalos.

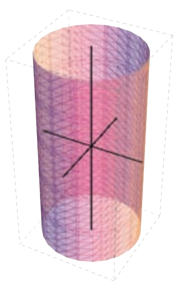
Apéndice B

SUPERFICIES EN $\mathbb{R}^3$

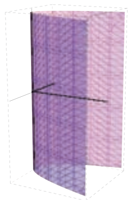
Cilindros

Un cilindro es la superficie compuesta por todas las rectas paralelas a una recta dada en el espacio pasando por una curva plana dada, llamada curva generatriz.

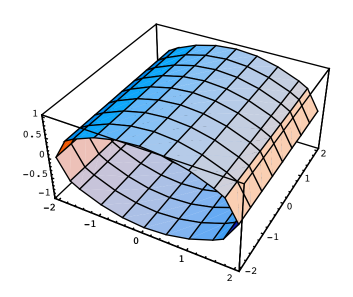
✔ En el caso de un cilindro circular $x^2 + y^2 = a^2$, la curva generatriz es una circunferencia.



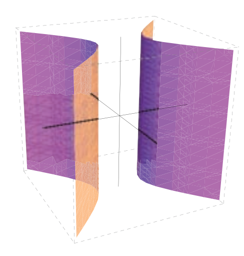
✔ Para el cilindro parabólico $y = x^2$, la curva generatriz es una parábola.



✔ El cilindro elíptico $y^2 + 4z^2 = 4$ está formado por rectas paralelas al eje X que pasan por la elipse $y^2 + 4z^2 = 4$ en el plano YZ. El cilindro se extiende a lo largo del eje X.



✔ El cilindro hiperbólico $x^2 - y^2 = 1$ está formado por rectas paralelas al eje z que pasan por la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ en el plano xy. Las secciones transversales del cilindro en planos perpendiculares al eje z son hipérbolas.



Una ecuación donde sólo aparezcan dos de las tres coordenadas, define un cilindro paralelo al eje de la coordenada que falta en dicha ecuación.

Para dibujar la superficie podemos seguir los siguientes pasos:

(1) dibujamos la curva definida por la ecuación del cilindro en el plano coordenado de las dos variables que aparecen en dicha ecuación.

(2) Trazamos curvas paralelas a dicha curva en planos paralelos y agregamos los bordes, es decir, "estiramos" la curva obtenida en el apartado anterior en la dirección de la coordenada que falta en la ecuación.

Superficies cuádricas

Una superficie cuádrica es la gráfica en el espacio de una ecuación de segundo grado en x, y y z. La forma general es:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

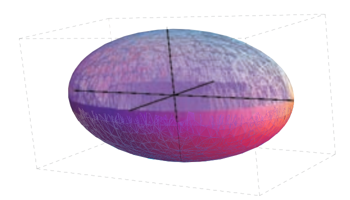
donde $A, B, C, \ldots$ son constantes. La ecuación se puede simplificar por traslación y rotación. Los cilindros vistos son ejemplo de superficies cuádricas.

Veamos otros ejemplos, como los elipsoides (que incluyen a las esferas), paraboloides, conos e hiperboloides.

✔ El elipsoide

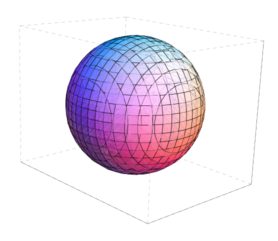
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

corta a los ejes coordenados en $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0 \pm c)$. Se encuentra dentro de la caja rectangular definida por las desigualdades $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ y $|z| \leq c$. La superficie es simétrica respecto de cada uno de los ejes coordenados porque las variables de la ecuación que la define están elevadas al cuadrado.



Las curvas en que los tres planos coordenados cortan la superficie son elipses. Por ejemplo, para $z = 0$ se tiene $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Si dos de los semiejes son iguales se tiene un elipsoide de revolución y si los tres semiejes son iguales, la superficie es una esfera.



✔ El paraboloide elíptico

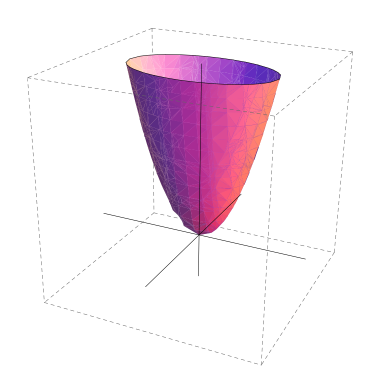
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

es simétrico respecto a los planos $x = 0$ y $y = 0$. La única intersección sobre los ejes es el origen. Excepto por este punto, la superficie se halla totalmente arriba o totalmente abajo del plano XY, dependiendo del signo de c. Las secciones cortadas por los planos coordenados son:

$$\begin{array}{lll} x = 0: & \text{la parábola} & z = \dfrac{c}{b^2} y^2 \\ y = 0: & \text{la parábola} & z = \dfrac{c}{a^2} x^2 \\ z = 0: & \text{el punto} & (0, 0, 0) \end{array}$$

Cada plano $z = z_0$ ($z_0 > 0$ si $c > 0$, $z_0 < 0$ si $c < 0$) corta a la superficie en la elipse:

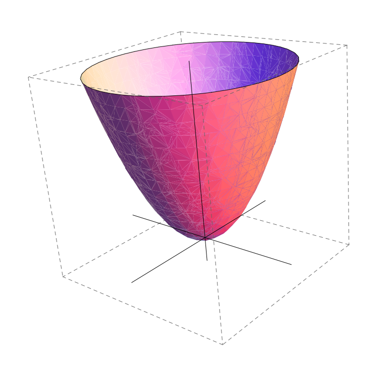
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0}{c}$$



✔ El paraboloide circular o paraboloide de revolución

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z}{c}$$

corresponde al caso $b = a$ en el ejemplo anterior, quedando en general la ecuación $x^2 + y^2 = kz$ o bien $z = kx^2 + ky^2$.



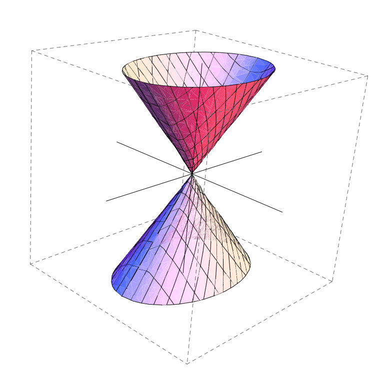
Las secciones transversales por planos perpendiculares al eje Z son círculos con centro en el eje Z. Las secciones transversales por planos que contienen al eje Z son parábolas.

✔ El cono elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

es simétrico respecto a los tres planos coordenados. Las secciones cortadas por los planos coordenados son:

$$\begin{array}{lll} x = 0: & \text{las rectas} & z = \pm\dfrac{c}{b}y \\ y = 0: & \text{las rectas} & z = \pm\dfrac{c}{a}x \\ z = 0: & \text{el punto} & (0,0,0) \end{array}$$



Las secciones cortadas por los planos $z = z_0 \neq 0$ son elipses cuyos centros están sobre el eje Z.

Si $a = b$ el cono es circular recto.

✔ El hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

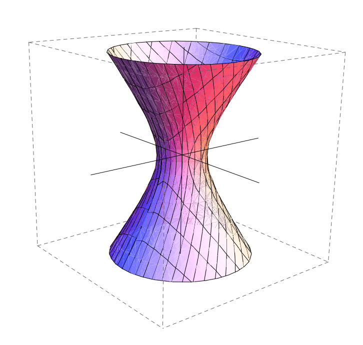
es simétrico respecto a cada uno de los tres planos coordenados. Las secciones cortadas por los planos coordenados son:

$$x = 0: \qquad \text{la hipérbola } \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$y = 0: \qquad \text{la hipérbola } \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$z = 0: \qquad \text{la elipse } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

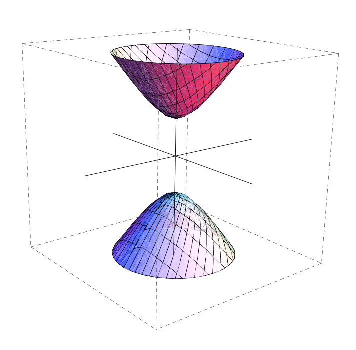
El plano $z = z_0$ corta la superficie en una elipse con centro sobre el eje Z. Se trata de una superficie conexa, por eso se llama de una hoja.



✔ El hiperboloide de dos hojas

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es simétrico respecto a cada uno de los tres planos coordenados. El plano $z = 0$ no intersecta la superficie. Para que un plano horizontal $z = z_0$ intersecte debe ocurrir $|z_0| \geq c$.



Las secciones hiperbólicas

$$x = 0: \qquad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y = 0: \qquad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

tienen sus vértices y focos sobre el eje Z. La superficie está separada en dos porciones, una arriba del plano $z = c$ y la otra por debajo del plano $z = -c$. Por ello se llama hiperboloide de dos hojas.

El número de términos negativos en las ecuaciones del hiperboloide nos da el número de hojas de éste. Si reemplazamos en la ecuación el 1 de la derecha por 0 obtenemos la ecuación de un cono elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

Los hiperboloides son asintóticos a este cono.

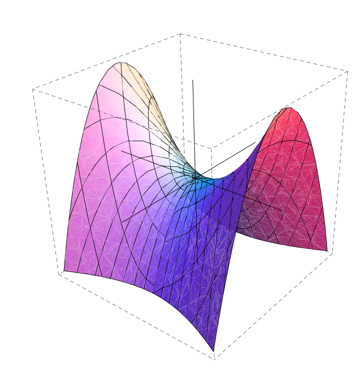
✔ El paraboloide hiperbólico

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}, \quad c > 0$$

tiene simetría respecto a los planos $x = 0$ y $y = 0$. Las secciones con estos planos son:

$$x = 0: \qquad \text{la parábola} \quad z = \frac{c}{b^2}y^2$$

$$y = 0: \qquad \text{la parábola} \quad z = -\frac{c}{a^2}x^2$$



En el plano $x = 0$, la parábola se abre hacia arriba desde el origen. La parábola en el plano $y = 0$ se abre hacia abajo.

Si cortamos la superficie por un plano $z = z_0 > 0$, la sección es una hipérbola

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z_0}{c}$$

con su eje focal paralelo al eje Y. Si z_0 es negativa, el eje focal es paralelo al eje X.

Bibliografía

[1] APOSTOL, T.M. (1989): *Calculus.* Vol II. Ed. Reverté.

[2] CAMPOS, B.; CHIRALT, C. (2004): *Apuntes de cálculo integral.* Publicacions de la Universitat Jaume I, Castelló.

[3] DE BURGOS, J. (2000): *Cálculo infinitesimal de una variable.* McGraw Hill, Madrid.

[4] DE BURGOS, J. (2000): *Cálculo infinitesimal de varias variables.* McGraw Hill, Madrid.

[5] EDWARDS-PENNEY. (1994) *Cálculo con geometría analítica.* Prentice-Hall Hispanoamericana, México.

[6] MARSDEN, J.E.; TROMBA, A.J. (2004): *Cálculo vectorial.* Pearson, Madrid.

[7] PITA RUIZ, C. (1995): *Cálculo Vectorial.* Prentice-Hall Hispanoamericana, México.

[8] RON LARSON, ROBERT P. HOSTETLER, BRUCE H. EDWARDS. (2006): *Cálculo con geometría analítica.* McGraw-Hill, México.

[9] SALAS, S. L., HILLE E. (1994): *Calculus (Volumen I y II).* Ed. Reverté, Barcelona.

[10] STEWART, J.M. (1999): *Cálculo diferencial e integral.* Thomson Paraninfo, México.

[11] THOMAS, G.B. (2006): *Cálculo de una y varias variables (Volumen I y II).* Pearson, México.